Matemáticas

2

Segundo grado
Secundaria

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Verónica Hoyos Aguilar
Mariana Luisa Sáiz Roldán

PATRIA
educación

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez
Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN

Dra. Mariana Sáiz Roldán
Universidad Pedagógica Nacional, México

Dra. Verónica Hoyos Aguilar
Universidad Pedagógica Nacional, México

Dirección editorial: Tomás García Cerezo
Gerencia editorial de contenidos: María Antonieta Salas Chávez
Coordinación general de contenidos: José de Jesús Arriaga Carpio
Coordinación de contenidos de Matemáticas: Alejandro González Luna
Edición: Sócrates Bárcenas Armendáriz
Asistencia editorial: Roberto Rojas López
Coordinación pedagógica: Rosa Elia Martínez Chavarría

Coordinación de edición técnica: Héctor Rafael Garduño Lamadrid
Diseño de interiores: Juliana Porras Maldonado
Formación de interiores: Alejandra Bolaños Ávila
Coordinación gráfica: Mónica Godínez Silva
Asistencia gráfica: Jorge Alberto Huerta Montes, Marco A. Rosas, Rubén Vite Maya, Aurora Hérnandez Pastrana, María Elizabeth Mendizabal Arzate
Fotografía: Archivo Gráfico Patria, © Shutterstock Inc.
Ilustración: Archivo Gráfico Grupo Editorial Patria, Jorge Alberto Huerta Montes, © Shutterstock Inc.
Diseño de portada: Grupo Editorial Patria, S.A. de C.V., con la colaboración de Nice Montaño Kunze
Fotografía de portada: © Shutterstock. Inc

Matemáticas 2

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN: 978-607-550-180-2

Primera edición, febrero de 2019

Presentación

El presente libro tiene por objeto ayudarte a desarrollar las competencias matemáticas a través de actividades de razonamiento, modelación y resolución de problemas, mediante el uso y la transformación de símbolos matemáticos y figuras geométricas. Debes tener en mente que aprender y hacer matemáticas quiere decir realizar cierto tipo de actividades. Así como aprender y saber jugar futbol se manifiesta jugándolo, saber matemáticas significa arriesgarse constantemente al juego de dar y pedir razones, asociar ideas y símbolos matemáticos con situaciones reales, además de formular y resolver problemas matemáticos.

En el diseño del libro se sugieren actividades que propician el razonamiento matemático, es decir, buscar y formular las explicaciones que dan lugar a un procedimiento, resultado o solución. En cada secuencia, te invitamos a reflexionar y a argumentar sobre los resultados que obtienes realizando las actividades que, en la mayoría de los casos, comparas y compartes con un compañero, lo que te permitirá entender el papel que desempeñan ciertos conocimientos ya adquiridos para obtener otros nuevos.

Una actividad que también realizarás en este libro consiste en relacionar ideas y procedimientos matemáticos con situaciones extramatemáticas; cuando se utilizan ideas matemáticas para resolver algún problema del mundo no matemático, se realiza una aplicación, pero en otras ocasiones, se propone describir una situación con conceptos matemáticos, en cuyo caso se lleva a cabo una modelación. Las aplicaciones y la modelación son fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas que, por supuesto, no está desligado del razonamiento.

Los problemas en matemáticas se asemejan al papel que tiene el balón en el futbol, en el sentido de que son necesarios para participar en el juego de las matemáticas. Un problema es una situación en la cual se requiere obtener una respuesta cuyo proceso de obtención es, en principio, desconocido; sin embargo, con esfuerzo y dedicación, y movilizando conocimientos previos, se puede hallar. Los problemas pueden ser de aplicación o modelación, pero también, y en gran medida, pueden encontrarse dentro de la esfera de las matemáticas.

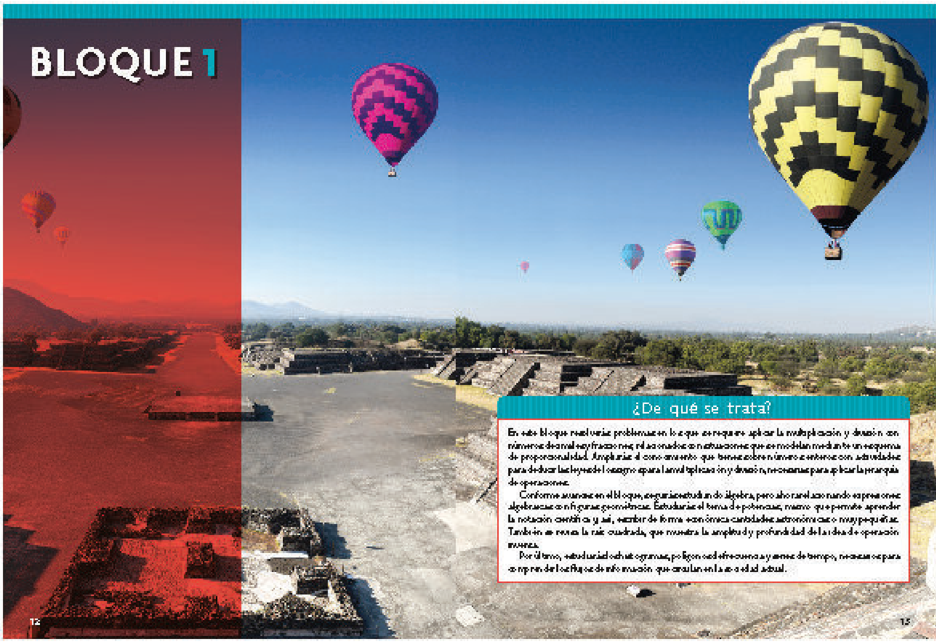
Por lo anterior, en cada secuencia se formulan problemas en diferentes niveles y se ofrecen algunas indicaciones para que los resuelvas, mas no se encuentran resueltos en el libro con frecuencia. Esto con el fin de que construyas los conceptos matemáticos mediante la solución de los problemas; cuando los realices, te darás cuenta de que, al revisar las definiciones de los conceptos relacionados, te parecerán naturales y claros. Los problemas de la sección “Una mirada previa” de cada secuencia tienen la intención de indicar aspectos importantes de los aprendizajes esperados con el estudio de la misma. En algunas ocasiones podrás avanzar poco en la solución; en estos casos se recomienda avanzar en la secuencia y luego retomar las actividades parcialmente resueltas. Lo mismo se puede decir de ciertos problemas iniciales de cada sesión.

A lo largo del libro se sugieren formas de utilizar la tecnología para resolver algunos problemas, como lo es el uso fundamental de la calculadora. La idea es que la tecnología proporcione recursos que potencialicen tu razonamiento. Por último, deseamos que el presente libro sea una guía efectiva para tu aprendizaje de las matemáticas.

Los autores

Índice

¿Cómo es tu libro?



Entrada de bloque

Encontrarás una breve explicación de los contenidos del bloque, se titula **¿De qué se trata?**

Secuencia

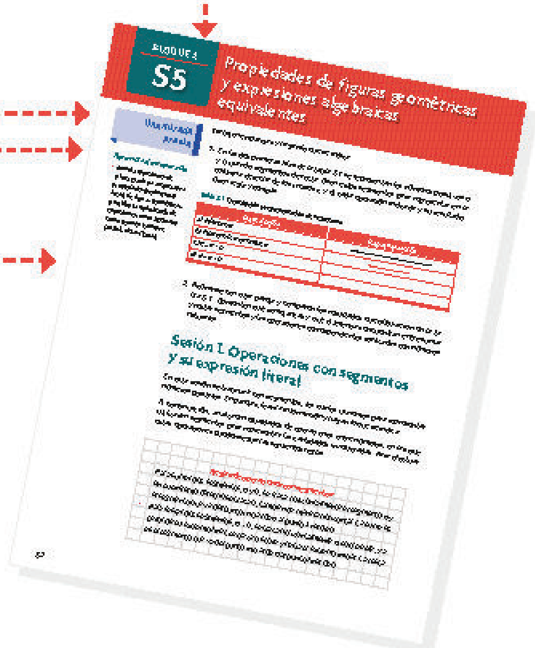
Los bloques que conforman esta obra se denominan secuencias y cubren un aprendizaje esperado indicado en el programa. Cada secuencia cuenta con las siguientes secciones: "Una mirada previa", "Sesiones", "En retrospectiva" y "¿Qué aprendí?".

Una mirada previa

En esta sección se formula un problema y se ofrecen indicaciones para avanzar en su solución; la intención es ubicarte en la problemática y el contenido que se estudiará.

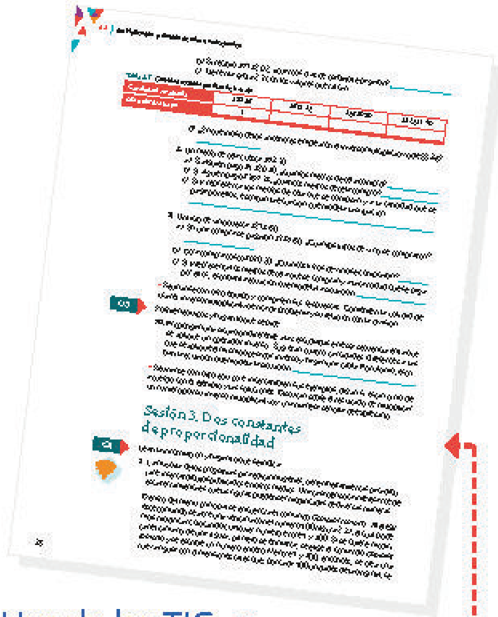
Aprendizajes esperados

Al inicio están los aprendizajes esperados que alcanzarás a lo largo de cada secuencia.



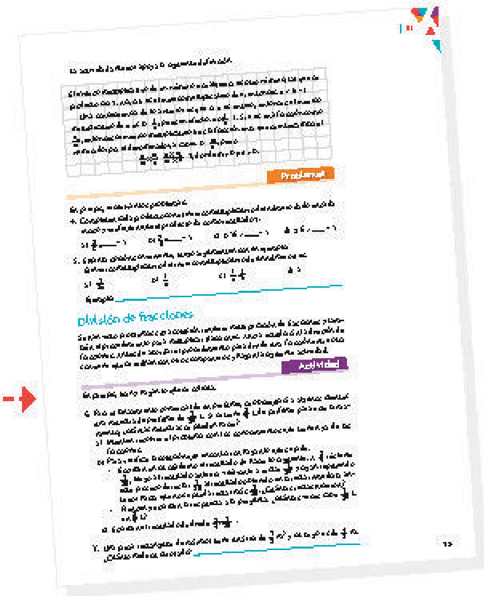
Icono de habilidades socioemocionales

Son preguntas para que expreses tus sensaciones, estados de ánimo, con relación a los contenidos que estás estudiando.



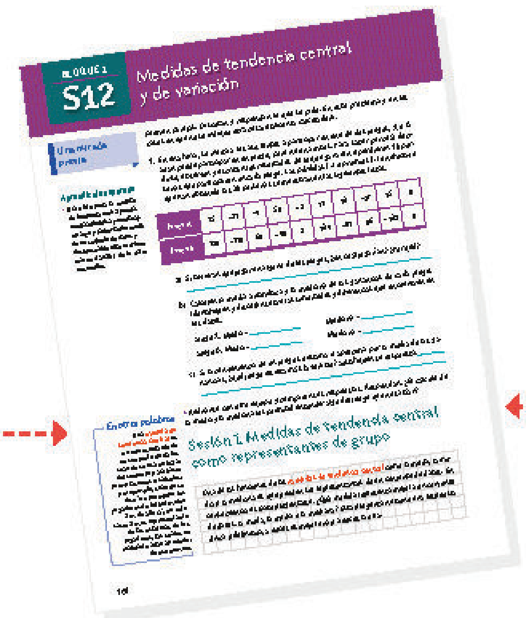
Uso de las TIC

Son sugerencia en la utilización de recursos proporcionados por la tecnología para resolver problemas u obtener información en internet.



Actividad y problemas

Se pueden resolver de forma individual, en parejas o en equipo.



Sesiones

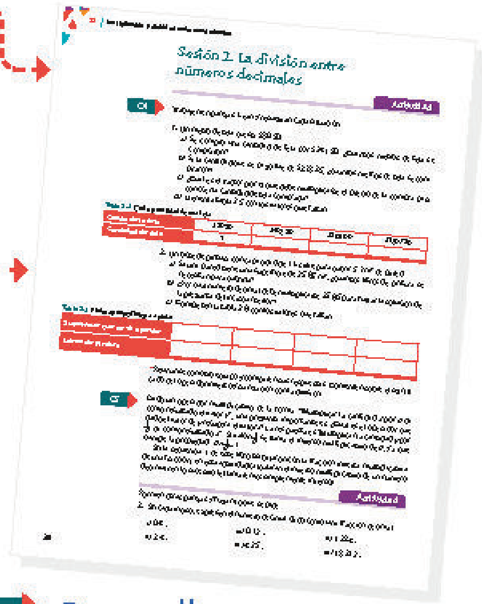
En una sesión se proponen diversas actividades y se ofrece información para concluirlas en una o dos clases de 50 minutos. Cada sesión tiene un inicio, un desarrollo y un cierre.

En otras palabras

Define conceptos importantes que se tratan a lo largo de las secuencias.

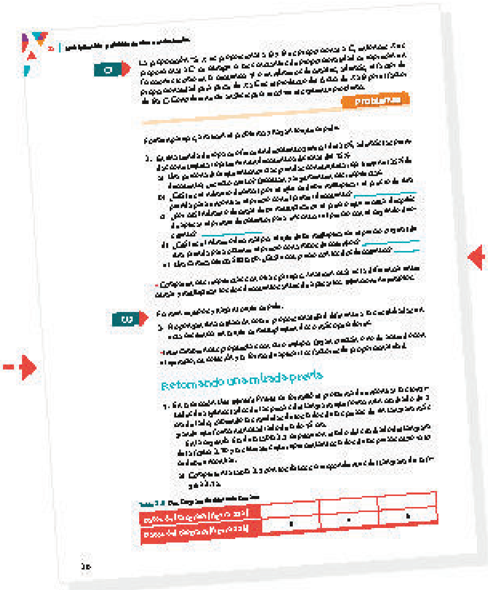
α Inicio

Es una actividad problema para iniciar el tratamiento de un aprendizaje esperado. Se debe intentar realizar al comenzar el estudio de la sesión correspondiente.



σ Desarrollo

En el desarrollo también se proponen actividades problema, pero además se agrega información para sintetizar aspectos vistos en las actividades o definir conceptos.



Retomando una mirada previa

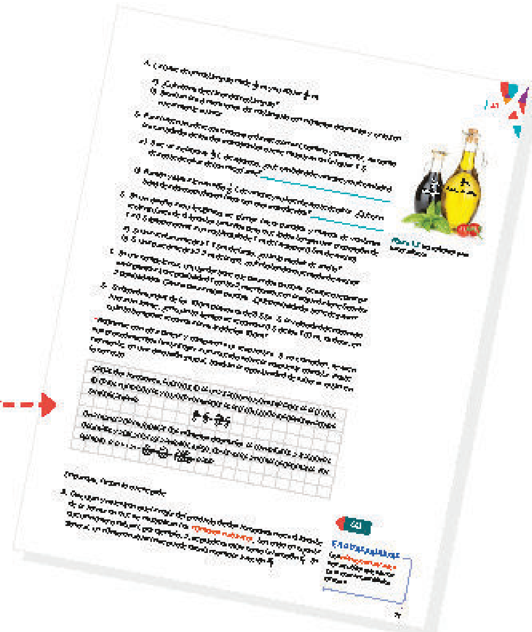
Es una actividad que analiza de una manera más profunda el problema planteado al inicio de la secuencia.

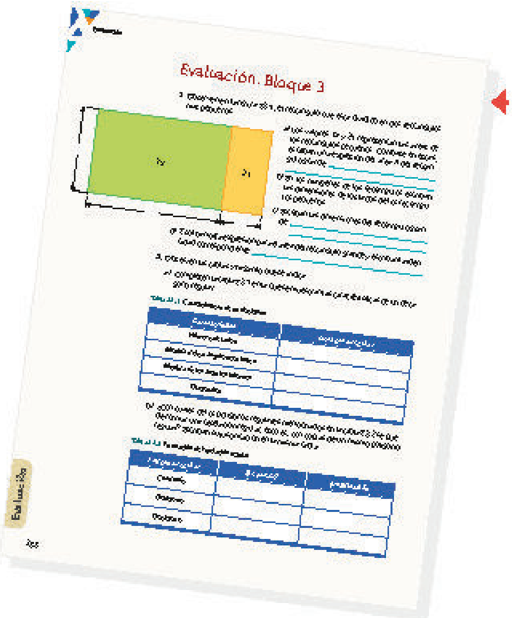
ω Cierre

Propone actividades de diversos tipos, a veces una actividad-problema, a veces llevar a cabo discusiones en equipo o bien sugerencias para preparar y hacer exposiciones.

Información matemática

Se introducen conceptos, estrategias procedimientos o reglas, mediante diversos métodos, unas veces con una explicación y otras solo con las ideas.

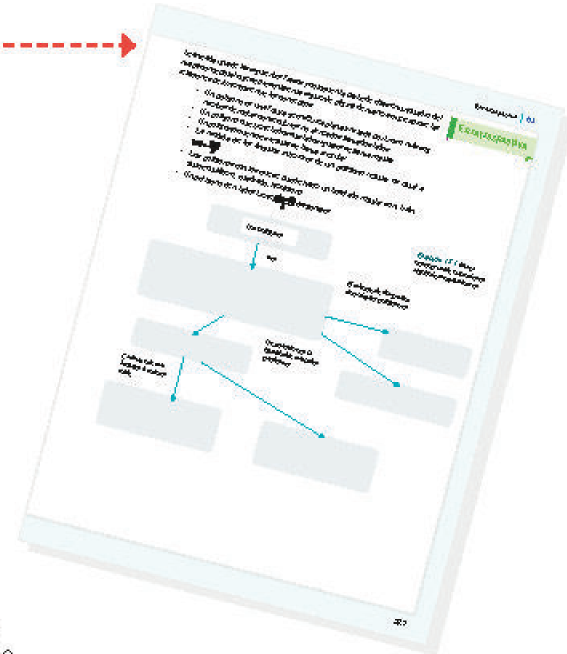




Evaluación. Bloque 3

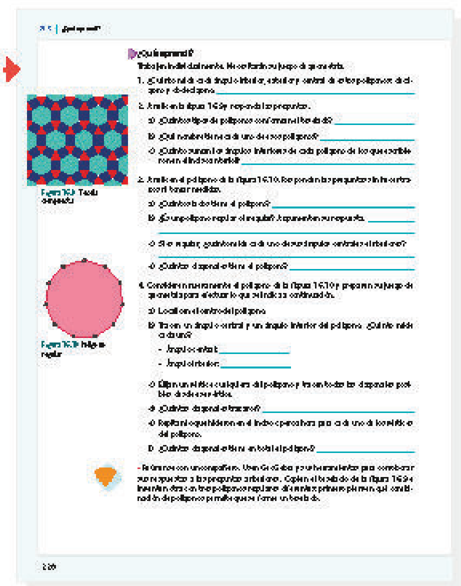
Evaluación

Se evalúan los aprendizajes esperados del bloque con base en todas las secuencias.



En retrospectiva

Un mapa conceptual es una representación en el plano de conceptos y sus relaciones.
Se da el contenido del mapa que debe distribuirse adecuadamente en los nodos.



¿Qué aprendí?

¿Qué aprendí?

Es un instrumento para que midas el avance de tu aprendizaje, se compone de problemas similares a los vistos en el estudio de la secuencia.

BLOQUE 1

¿De qué se trata?

En este bloque resolverás problemas en los que se requiere aplicar la multiplicación y división con números decimales y fracciones; relacionados con situaciones que se modelan mediante un esquema de proporcionalidad. Ampliarás el conocimiento que tienes sobre números enteros con actividades para deducir las leyes de los signos para la multiplicación y división, necesarias para aplicar la jerarquía de operaciones.

Conforme avances en el bloque, seguirás estudiando álgebra, pero ahora relacionando expresiones algebraicas con figuras geométricas. Estudiarás el tema de potencias, mismo que permite aprender la notación científica y, así, escribir de forma económica cantidades astronómicas o muy pequeñas. También se revisa la raíz cuadrada, que muestra la amplitud y profundidad de la idea de operación inversa.

Por último, estudiarás los histogramas, polígonos de frecuencia y series de tiempo, necesarios para comprender los flujos de información que circulan en la sociedad actual.

S1 Multiplicación de fracciones y números decimales

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Reúnanse en parejas, analicen la situación y hagan lo que se pide.

1. Un fabricante de juguetes quiere hacer tres modelos de muñeco de manera que tengan la misma forma, pero un tamaño proporcional diferente. Tres medidas de cada muñeco son importantes: la altura de la cabeza, la del cuello-tronco, y la altura de las extremidades inferiores (figura 1.1). Ha elaborado cabezas de tres medidas cuya altura es distinta: 20 unidades (u), 15 u y 10 u. ¿De qué altura deben ser las partes de cada muñeco para que sean proporcionales?

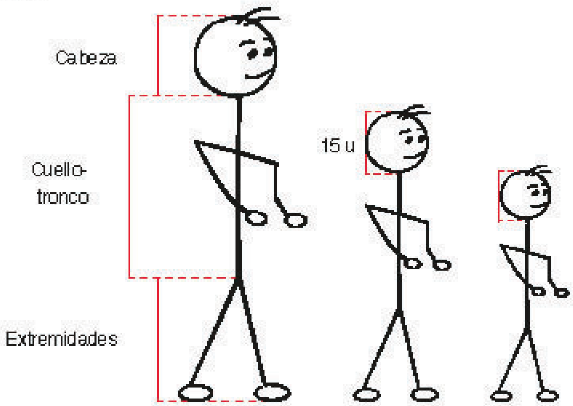


Figura 1.1 Dimensiones de las partes de los muñecos

a) Si el cuello-tronco del muñeco 1, cuya cabeza mide 20 u, es de 45 u,... ______
   - ¿cuánto debe medir el cuello-tronco del muñeco 2, cuya cabeza es de 15 u?
   - ¿cuánto debe medir el cuello-tronco del muñeco 3, cuya cabeza es de 10 u? ______

b) Si las extremidades inferiores del muñeco 1 miden 30 u,...
   - ¿cuánto deben medir las extremidades del muñeco 2? ______
   - ¿cuánto deben medir las extremidades del muñeco 3? ______

c) Organicen la información en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Partes principales de los muñecos

	Muñeco 1	Muñeco 2	Muñeco 3
Cabeza (u)			
Cuello-tronco (u)			
Extremidades (u)			

d) ¿Cuál es la fracción que, multiplicada por las medidas del muñeco 1, da como resultado las dimensiones correspondientes del muñeco 2? ______
e) ¿Cuál es la fracción que, multiplicada por las medidas del muñeco 2, da como resultado las dimensiones correspondientes del muñeco 3? ______
f) ¿Cuál es la fracción que, multiplicada por las medidas del muñeco 1, da como resultado las medidas correspondientes del muñeco 3? ______
g) ¿Qué relación hay entre las fracciones de los incisos *d*, *e* y *f*? ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus procedimientos y argumenten. ¿Descubrieron la relación de multiplicación entre las fracciones que llevan del muñeco 1 al 2 y luego del 2 al 3, con la fracción que lleva directamente del muñeco 1 al 3?

Sesión 1. La multiplicación de una cantidad por una fracción

α

En parejas, analicen la situación y hagan lo que se indica.

1. En la figura 1.2, se muestra la transformación de un pentágono regular al aplicarle dos transformaciones a escala, primero una reducción y luego una ampliación.

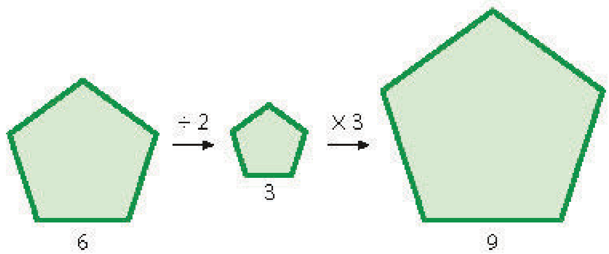


Figura 1.2 Transformaciones de un pentágono regular

   a) Escriban una expresión aritmética que indique las operaciones que se hacen sobre el pentágono de base 6 para llegar al de base 9.
   b) En la figura 1.3, ¿cómo se obtienen las dimensiones del segundo pentágono a partir de las del primero con una sola transformación?

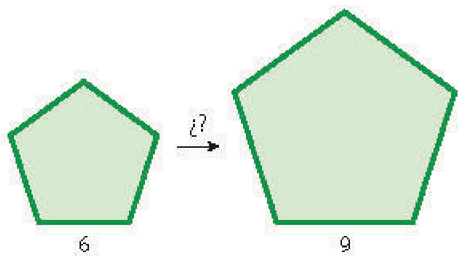


Figura 1.3 Transformación de un pentágono

*Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si son diferentes, revisen su procedimiento y argumenten hasta llegar a una conclusión. Luego, entre los cuatro, respondan las preguntas.

- ¿Qué número multiplicado por 6 da como resultado 9?
- ¿Están de acuerdo que dicho número satisface la ecuación $6x = 9$?

σ

Multiplicar un número fraccionario por un entero y luego dividirlo entre otro entero se relaciona con la multiplicación de fracciones. En la siguiente actividad estudiarán esa relación.

Actividad

Formen nuevas parejas, lean el siguiente problema y hagan lo que se pide.

2. De un cuadrado se obtiene primero una ampliación multiplicando por el doble la medida de cada lado, y luego se obtiene una reducción dividiendo entre 3 la medida de cada lado. Esta doble transformación se muestra en la figura 1.4.

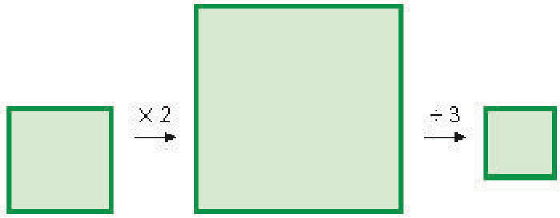


Figura 1.4 Dos transformaciones de un cuadrado

a) Si L es la longitud de cada uno de los lados del primer cuadrado, expresen las operaciones que llevan a cabo para obtener la longitud del lado del último cuadrado.
b) ¿Con qué fracción se debe multiplicar la longitud del lado del primer cuadrado para obtener la longitud del lado del último cuadrado?
c) ¿Qué igualdad de expresiones se deduce de las respuestas a los incisos *a* y *b*?

*Reúnanse con otra pareja y comenten la relación que encuentran entre lo que hicieron en la actividad anterior y la siguiente proposición.

El resultado de multiplicar una cantidad L por otra a, y dividir el resultado entre b, es igual al resultado de multiplicar la cantidad L por la fracción $\frac{a}{b}$; esto se expresa así:

$$\frac{L \times a}{b} = L \times \frac{a}{b}$$

Actividad

Analicen las expresiones y hagan lo que se indica.

En otras palabras
Se dice que dos expresiones aritméticas son **equivalentes** cuando, al realizar en cada caso las operaciones que indican, dan el mismo valor.

3. Unan con una línea cada expresión aritmética de la columna izquierda con su expresión **equivalente** de la columna derecha. Escriban los resultados en las líneas.

		Resultados
a) $\frac{45 \times 4}{5}$	i) $180 \times \frac{7}{3}$	______
b) $\frac{180 \times 7}{3}$	ii) $750 \times \frac{7}{3}$	______
c) $\frac{750 \times 49}{21}$	iii) $210 \times \frac{4}{5}$	______
d) $\frac{210 \times 20}{25}$	iv) $45 \times \frac{4}{5}$	______

La multiplicación de fracciones y decimales

Frecuentemente, se presentan problemas en los que es necesario operar con números decimales o fracciones, ya sea al sumar, multiplicar o dividir fracciones.

Problemas

Resuelvan los problemas utilizando las operaciones pertinentes.

4. La base de un rectángulo mide $\frac{1}{2}$ m y su altura $\frac{4}{5}$ m.

   a) ¿Cuánto mide el área del rectángulo?
   b) Escriban las dimensiones del rectángulo con números decimales y calculen nuevamente su área.

5. Para hacer un aderezo se recomienda mezclar sal, comino y pimienta, así como las cantidades de los dos ingredientes que se muestran en la figura 1.5.

   a) Si se va a elaborar $\frac{1}{3}$ L de aderezo, ¿qué cantidad de vinagre y qué cantidad de aceite de oliva deben mezclarse? ____________________

   b) Ramón y María tenían sólo $\frac{1}{8}$ L de vinagre y suficiente aceite de oliva. ¿Qué cantidad de aderezo pudieron hacer con esos ingredientes? ____________

Figura 1.5 Ingredientes para hacer aderezo

6. En un diseño arquitectónico, se planea hacer paredes y marcos de ventanas rectangulares de diferentes tamaños pero que todos tengan una proporción de 1 a 0.6 (proporcional a un rectángulo de 1 m de largo por 0.6 m de ancho).

   a) Si una ventana medirá 1.75 m de largo, ¿cuánto medirá de ancho?
   b) Si una pared medirá 2.2 m de largo, ¿cuánto tendrá que medir de ancho?

7. En una competencia, un jugador tiene que pasar dos pruebas. Se sabe que para pasar la primera tiene posibilidad 1 contra 2, mientras que en la segunda tiene 3 contra 2 posibilidades. Gana si pasa ambas pruebas. ¿Qué posibilidades tiene de ganar?

8. El récord mundial de los 100 m planos es de 9.58 s. Si la velocidad de recorrido fuera uniforme, ¿en cuánto tiempo se recorrería 0.5 de los 100 m, es decir, en cuánto tiempo se recorrería la mitad de los 100 m?

*Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus procedimientos hasta llegar a un acuerdo sobre la respuesta correcta. Posteriormente, en una discusión grupal, tendrán la oportunidad de saber si están en lo correcto.

Dadas **dos fracciones**, su producto es una fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Simbólicamente:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Una manera de multiplicar dos **números decimales** es convertirlos a fracciones decimales y aplicar la regla anterior; luego, devolverlos a números decimales. Por ejemplo: $0.17 \times 1.21 = \frac{17}{100} \times \frac{121}{100} = \frac{2057}{10000} = 0.2057$.

En parejas, hagan lo que se pide.

9. Discutan y muestren que la regla del producto de dos fracciones no es diferente de la forma en que se multiplican los números naturales, teniendo en cuenta que un número natural, por ejemplo, 2, se puede escribir como la fracción $\frac{2}{1}$. En general, un número natural n se puede escribir como la fracción $\frac{n}{1}$.

En otras palabras

Los **números naturales** son aquéllos que sirven para contar cantidades enteras.

Sesión 2. El inverso multiplicativo

α

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. En la figura 1.6 se muestra que, para pasar del primer cuadrado al segundo (proceso conocido como ampliación), se multiplica por 3 las medidas de sus lados.
   a) ¿Por qué número se tienen que multiplicar las medidas de los lados del segundo cuadrado para recuperar las dimensiones del primer cuadrado?

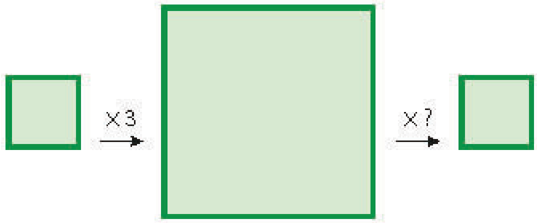


Figura 1.6 Esquema del problema de encontrar la fracción de reducción

En otras palabras

En las reproducciones a escala, el **factor de proporcionalidad** es el número por el que se multiplican las medidas de la figura original para obtener las medidas de la copia.

   b) La primera transformación triplica las dimensiones del cuadrado. ¿Qué hace la segunda transformación? ___
   c) El **factor de proporcionalidad** en la primera transformación es 3. ¿Cuál es el factor de la segunda transformación? ___
   d) ¿Cuál es el resultado de multiplicar 3 por $\frac{1}{3}$? ___

*Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Argumenten y lleguen a un acuerdo acerca de cuáles son las mejores respuestas a las preguntas.

σ

La acción de pasar de un estado a otro y luego regresar al estado original es muy útil y la realizamos frecuentemente. Por ejemplo, estamos en nuestra casa (estado original), salimos de ella y más tarde regresamos (volvemos al estado original); o, si cometemos un error al trabajar con la computadora, existe la función *Deshacer* para volver a la situación en la que estábamos antes de cometer el error. En aritmética, se conoce como **inversa** a la operación que devuelve al original. Verán esto realizando la siguiente actividad.

Actividad

La multiplicación por un número se puede ver como una transformación. Formen parejas y hagan lo que se pide.

2. Multipliquen por 2 cada uno de los números: 2, 3, y 4.
   a) Escriban los tres resultados. ___
   b) ¿Por cuál fracción deben multiplicar cada uno de los números que obtuvieron en el inciso anterior para volver a los números originales, 2, 3, y 4? ___
   c) ¿Cuál es el resultado de multiplicar por 2 la fracción del inciso *b*? ___

3. Multipliquen por $\frac{3}{4}$ cada uno de los números: 12, 18 y 52.
   a) Escriban los tres números resultantes. ___
   b) ¿Qué fracción multiplicada por los números que dieron en el inciso anterior permite recuperar los números 12, 18 y 52? ___
   c) ¿Cuál es el resultado de multiplicar esta fracción por $\frac{3}{4}$? ___

*Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo. Pueden usar la calculadora para comprobar sus respuestas. ¿Comprobaron que en los incisos 2*c* y 3*c* el resultado es la unidad?

La actividad anterior apoya la siguiente definición.

El **inverso multiplicativo** de un número a cualquiera es otro número, tal que su producto sea 1. Así, si b es el inverso multiplicativo de a, entonces: $a \times b = 1$

Una consecuencia de lo anterior es que si a es entero, entonces el inverso multiplicativo de a es $b = \frac{1}{a}$, pues en efecto: $a \times \frac{1}{a} = 1$. Si a es una fracción como $\frac{n}{m}$, entonces su inverso multiplicativo b es la fracción en la que se intercambia el numerador por el denominador, a saber: $b = \frac{m}{n}$, pues:

$$\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = \frac{n \times m}{m \times n} = 1, \text{ donde } m \neq 0 \text{ y } n \neq 0.$$

Problemas

En parejas, resuelvan los problemas.

4. Completen cada producto con el inverso multiplicativo del número dado en cada inciso y verifiquen que el producto da como resultado 1.

a) $\frac{3}{8} \times$ ____ $= 1$ b) $\frac{7}{5} \times$ ____ $= 1$ c) $0.16 \times$ ____ $= 1$ d) $2.5 \times$ ____ $= 1$

5. Elijan la opción conveniente, luego argumenten con un ejemplo.
El inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de un número a es:

a) $\frac{1}{2a}$ b) $\frac{1}{a}$ c) $\frac{1}{a} \div \frac{1}{a}$ d) a

Ejemplo: ______________________________

División de fracciones

Se han visto problemas cuya solución requiere multiplicación de fracciones y también el procedimiento para multiplicar fracciones. Ahora estudiarán la división de fracciones. Antes de abordar el procedimiento para dividir una fracción entre otra conviene que se reúnan con otros compañeros y hagan la siguiente actividad.

Actividad

En parejas, lean y hagan lo que se solicita.

6. Para el lanzamiento comercial de un perfume, se obsequiará a algunos clientes una muestra de perfume de $\frac{1}{20}$ L. Si se tiene $\frac{3}{4}$ L de perfume para este lanzamiento, ¿cuántas muestras se pueden hacer?
   a) Intenten resolver el problema con los conocimientos que tienen ya de las fracciones.
   b) Para verificar la solución que encontraron hagan lo que se pide.
      - Escriban en su cuaderno el resultado de hacer lo siguiente: A $\frac{3}{4}$ réstenle $\frac{1}{20}$, luego al resultado anterior vuélvanle a restar $\frac{1}{20}$ y sigan repitiendo este proceso de restar $\frac{1}{20}$ al resultado obtenido en la resta inmediata anterior hasta que no se pueda restar más $\frac{1}{20}$. ¿Cuántas restas hicieron?
      - Piensen y escriban la respuesta a la pregunta: ¿cuántas veces cabe $\frac{1}{20}$ L en $\frac{3}{4}$ L?
   c) Escriban el resultado de dividir $\frac{3}{4} \div \frac{1}{20} =$ ____

7. Una pieza rectangular de mármol tiene un área de $\frac{1}{2}$ m^2 y su largo es de $\frac{4}{3}$ m. ¿Cuánto mide su otro lado? ______________________________

a) Traten de encontrar la solución con los conocimientos que tienen de fracciones.
b) Para verificar o rectificar la solución que propusieron hagan lo que sigue:
   - ¿Cuál es la incógnita? ______________________
   - Teniendo en cuenta la fórmula del área de un rectángulo, escriban la ecuación correspondiente con los datos del problema y la incógnita.
   - Resuelvan la ecuación.
c) Escriban el resultado de la división: $\frac{1}{2} \div \frac{4}{3} =$ ______________________
d) Escriban el otro lado de un rectángulo cuya área sea la fracción $\frac{a}{b}$ y su base la fracción $\frac{c}{d}$ (Hagan un dibujo en su cuaderno.)

*Reúnanse con otra pareja y contrasten sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo.

Con lo anterior, podrán darse cuenta de que la siguiente definición es adecuada.

La división de la fracción $\frac{a}{b}$ entre la fracción $\frac{c}{d}$ es la fracción $\frac{a \times d}{b \times c}$.

Es decir: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$, donde b, c y d son distintos de cero.

Verifiquen en las dos situaciones anteriores que el resultado se puede obtener con este procedimiento.

Problemas

En parejas resuelvan lo siguiente.

8. Se quiere dividir un queso de $\frac{3}{4}$ kg en porciones de $\frac{1}{8}$ kg. ¿Cuántas porciones de queso se pueden obtener?

9. ¿Cuántas veces cabe $\frac{2}{9}$ en $\frac{4}{3}$?

10. Hagan las siguientes divisiones de fracciones.

a) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} =$ b) $\frac{4}{3} \div \frac{1}{2} =$ c) $\frac{3}{8} \div \frac{2}{3} =$ d) $\frac{4}{7} \div \frac{16}{14} =$

*Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo. Posteriormente, en reunión grupal podrán verificar si están en lo correcto.

Mantengan las parejas con las que resolvieron los problemas.

11. Discutan la relación que hay entre el inverso multiplicativo y la división. Para ello, analicen la siguiente afirmación y escriban dos ejemplos en la línea.

"Dividir una cantidad entre a es lo mismo que multiplicar la cantidad por el inverso multiplicativo de a". ______________________

Retomando una mirada previa

1. Recuerden la situación planteada en la sección *Una mirada previa*.

"Un fabricante de juguetes quiere hacer tres modelos de muñeco de manera que tengan la misma forma, pero un tamaño proporcional diferente. Tres medidas de cada muñeco son importantes: la altura de la cabeza, la del cuello-tronco, y la altura de las extremidades inferiores. Ha elaborado cabezas de tres medidas cuya altura es distinta: 20 unidades (u), 15 u y 10 u. ¿De qué altura deben ser las partes de cada muñeco para que sean proporcionales?"

Posiblemente llenaron la tabla 1.1 como se muestra en la tabla 1.2.

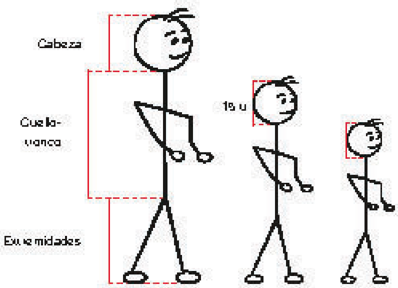


Tabla 1.2 Posibles medidas para las partes de los muñecos

	Muñeco 1	Muñeco 2	Muñeco 3
Cabeza (u)	20	15	10
Cuello-tronco (u)	45	33.75	22.5
Extremidades (u)	30	22.5	15

a) ¿Qué fracción multiplicada por la altura de la cabeza del muñeco 1 da como resultado la altura de la cabeza del muñeco 2? ____________

b) Multipliquen por 45 la fracción anterior. ¿Resultó 33.75? ____________

c) Ahora, multipliquen por 30 u la misma fracción. ¿Obtuvieron 22.5? ________

d) En caso de haberse equivocado, revisen su procedimiento y encuentren el correcto, utilizando la información que aquí se les ha dado.

En retrospectiva

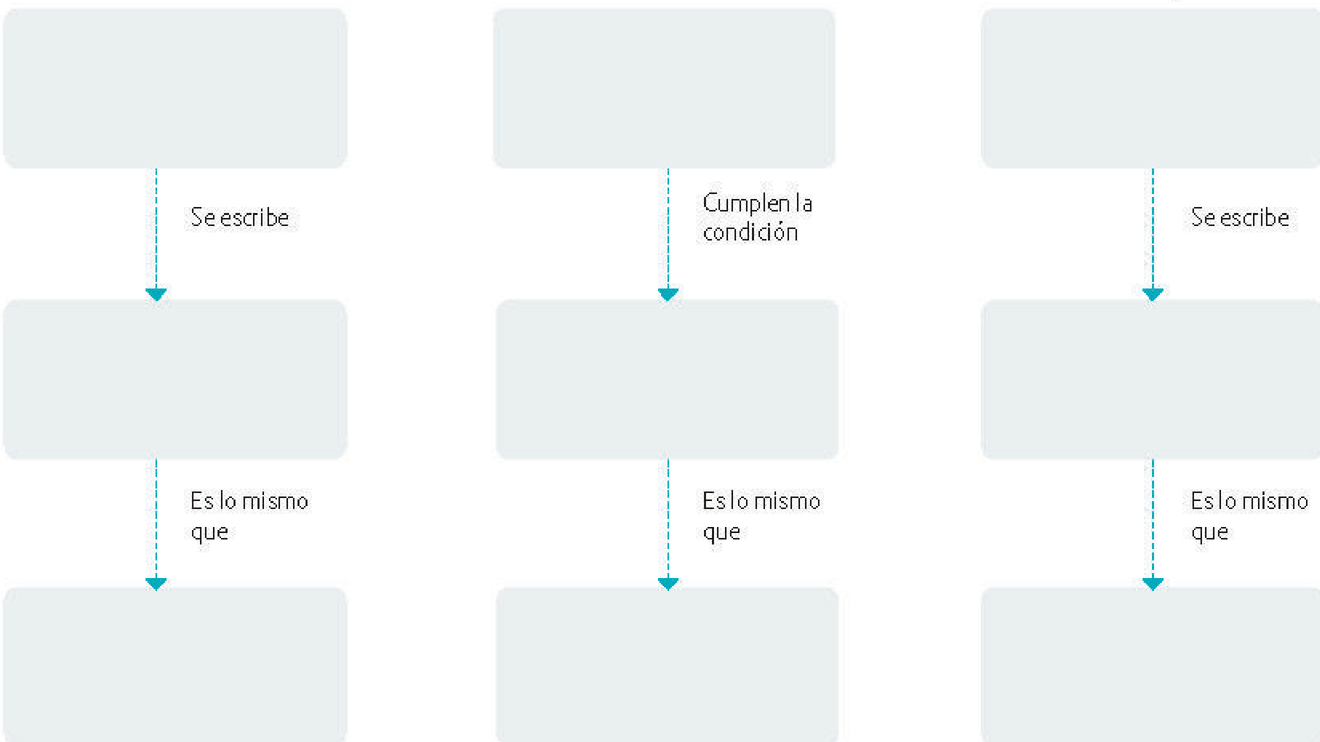
Escriban cada una de las siguientes expresiones en un recuadro del esquema que se presenta más adelante, de manera que muestre las relaciones pertinentes entre los conceptos; las letras a, b, c y d representan números enteros y L una cantidad cualquiera, es decir, una fracción o un número decimal.

- Multiplicar la fracción $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.
- Si a y b son inversos multiplicativos.
- Una cantidad L por una fracción $\frac{a}{b}$.

$a \times b = 1$ $\qquad \frac{a \times c}{b \times d}$ $\qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

$b = \frac{1}{a}$ $\qquad \frac{L \times a}{b}$ $\qquad L \times \frac{a}{b}$

Esquema 1.1 Mapa conceptual de multiplicación con fracciones positivas



¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente los problemas.

1. Se quiere hacer una amplificación del dibujo de un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, de modo que al lado del segmento cuya longitud mide 5 cm del triángulo original le corresponda un segmento con una longitud de 9 cm en el triángulo amplificado.
   a) ¿Cuáles son las medidas del triángulo amplificado? En su cuaderno hagan un dibujo o esquema de la situación. ____________________
   b) ¿Cuál es la fracción que, multiplicada por la longitud de los lados originales, da la longitud de los lados de la copia? ____________________

2. Un empresario invirtió un capital de \$50 000.00 y en un año aumentó a \$70 000.00.
   a) ¿Cuál es el factor de crecimiento anual del capital? ____________________
   b) Otro empresario invirtió \$80 000.00 en el mismo periodo y con las mismas condiciones. ¿En cuánto se convirtió su capital invertido? ____________________

3. El mapa turístico de cierta ciudad se hizo con una escala de 3:50 000, esto es, en el mapa un segmento de 3 cm representa 500 m de la realidad (500 m = 50 000 cm).
   a) Si un lugar que se quiere visitar en el mapa está a 9 cm de la ubicación del hotel de un visitante, ¿a qué distancia se encuentra en la realidad? ____________
   b) Una iglesia se encuentra a 5.5 km del hotel del visitante. En el mapa, ¿cuál es la longitud del segmento que separa los puntos del hotel y la iglesia? ____________________

4. El aire es una mezcla de nitrógeno, oxígeno, anhídrido carbónico y otros gases nobles. En la capa de aire más cercana a la tierra, y en la cual respiramos, las proporciones de cada uno de estos elementos son aproximadamente $\frac{3}{4}$ de nitrógeno, $\frac{1}{5}$ de oxígeno y $\frac{3}{10\,000}$ de dióxido de carbono. ¿Cuántos litros de cada uno de estos gases hay en un metro cúbico de aire? (Recuerden que un metro cúbico equivale a 1000 L).

5. A un triángulo, cuyas dimensiones son 12 cm, 16 cm y 20 cm, se aplica una ampliación con un factor de $\frac{4}{3}$, y al triángulo resultante se le vuelve aplicar una ampliación con un factor de $\frac{3}{2}$.
   a) ¿Qué factor se aplica al primer triángulo para obtener el tercero? ____________
   b) ¿Por qué factor se tienen que multiplicar los lados de la última figura ampliada para recuperar las dimensiones de la primera ampliación? ____________
   c) ¿Por qué factor se tienen que multiplicar los lados de la última figura ampliada para recuperar las dimensiones de la figura original? ____________

Multiplicación y división de números decimales

BLOQUE 1

S2

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Trabajen en parejas.

1. En la figura 2.1 se muestran los dibujos de dos tangram. El de la figura 2.1a está hecho sobre una pieza de madera de 15 cm por 15 cm y el de la figura 2.1b sobre una pieza de 9 cm por 9 cm. ¿Cuáles serán las medidas de los lados desconocidos en el tangram chico si sus lados son proporcionales a los del tangram grande?

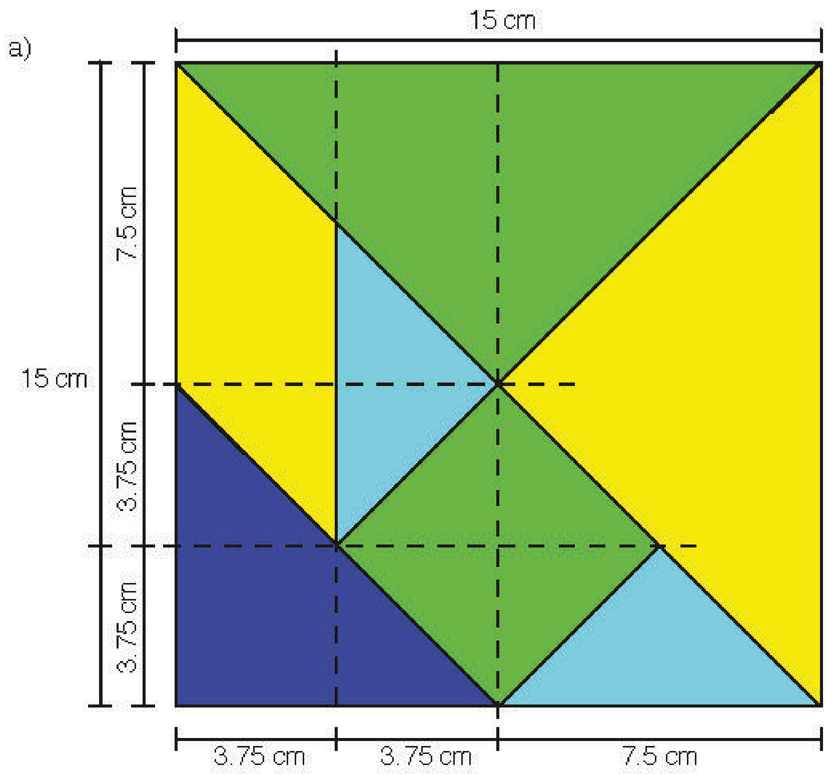


Figura 2.1a Tangram de 15 cm.

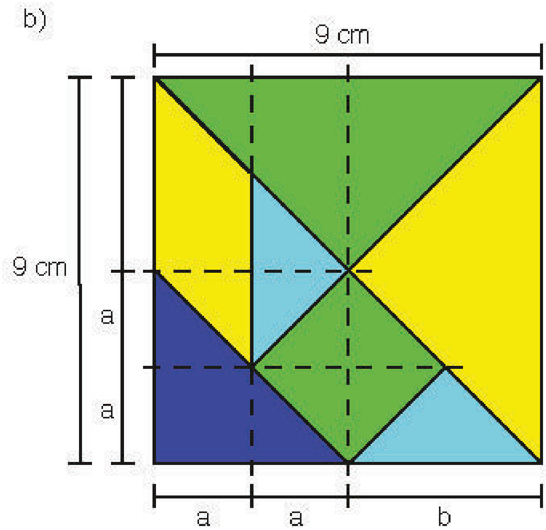


Figura 2.1b Tangram de 9 cm.

a) Encuentren las medidas correspondientes en el tangram de la figura 2.1b. ______

b) ¿Qué número decimal tiene que multiplicarse por las dimensiones del tangram de la figura 2.1a para obtener las de la figura 2.1b? ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo sobre el procedimiento más conveniente para encontrar el factor de proporcionalidad que relaciona las medidas del tangram grande con las medidas del tangram chico.

Sesión 1. Producto de números decimales

α

Respondan individualmente (pueden utilizar calculadora).

1. Un metro de tela cuesta $80.50.
   a) ¿Cuánto cuestan 3 m de tela?
   b) ¿Cuánto cuestan 4.7 m de tela?

* Reúnanse con otro compañero y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo acerca de la ecuación que expresa el costo de un pedazo de tela en términos de su longitud. Comenten alguna utilidad de dicha ecuación.

σ

Los **números decimales** se usan para procesar información matemática acerca de precios, tamaños, etc., así como también en la vida cotidiana, en las profesiones, en transacciones comerciales o en todas las ciencias. Para entender algunas de las propiedades y aplicaciones de los números decimales, resuelvan los problemas.

Actividad

Trabajen en equipo. Analicen la situación y hagan lo que se indica.

2. En un diseño arquitectónico se quieren construir rectángulos de manera que, si la altura mide cierta cantidad, la base sea 0.62 veces dicha cantidad.
   a) Completen la tabla 2.1 con la longitud de la base que corresponda a cada altura.

Tabla 2.1 Altura y base de diferentes rectángulos

Altura (cm)	1	3.25	5.5	7.75
Base (cm)	0.62			

En otras palabras

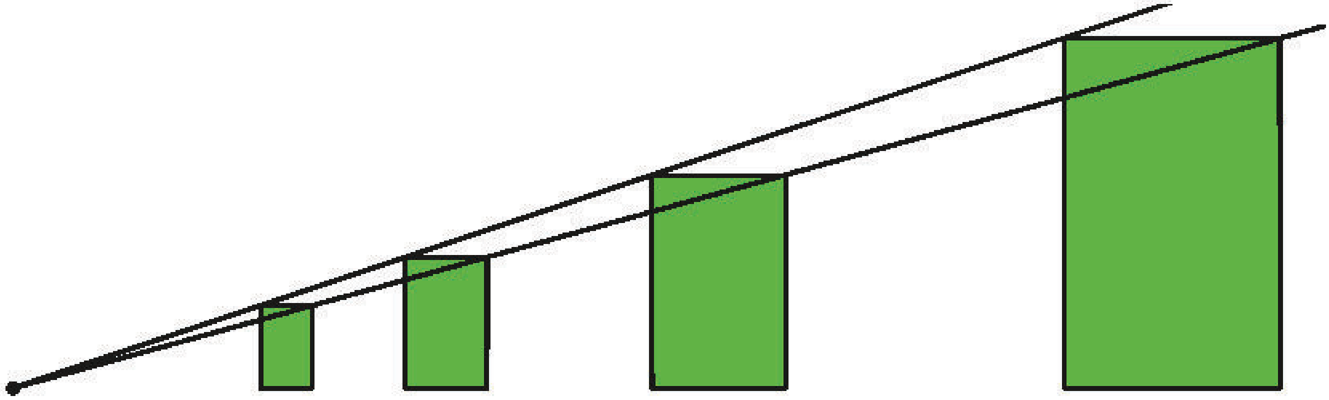
Perspectiva: es el arte de dibujar para reproducir en dibujos planos el efecto de profundidad y posición relativa que se miran en los objetos en tres dimensiones.

   b) En el diseño se colocarán cuatro rectángulos en perspectiva (figura 2.2) de modo que la altura de cada uno sea la ampliación por 1.62 de la altura del anterior. Escriban en la primera fila de la tabla 2.2 las tres alturas que faltan (usen dos decimales).
   c) Para hallar las bases, recuerden que su longitud es 0.62 la longitud de la altura. Escriban en la segunda fila de la tabla 2.2 las 3 bases que faltan.

Tabla 2.2 Altura y base de cuatro rectángulos en perspectiva

Altura (cm)	1			
Base (cm)	0.62			

   d) Formulen observaciones sobre aspectos del problema que les parezcan destacables respecto al uso que se le da a los números decimales.



* Reúnanse con otro equipo y comparen sus resultados. Comenten cómo se utiliza un número decimal en cada tipo de operación.

Figura 2.2 Cuatro rectángulos en perspectiva

Problemas

En parejas, analicen y resuelvan los problemas.

3. Un paquete de 500 hojas bond tiene un grosor de 4.5 cm.
   a) ¿Cuál es el grosor de un paquete de 750 hojas de la misma clase?
   b) Llenen la tabla 2.3 con las medidas del grosor de cada paquete.

Tabla 2.3 Grosores de distintos paquetes de hojas

Número de hojas	500	750	1200	2300
Grosor (cm)	4.5			

   c) Si x es el número de hojas y y el grosor del paquete, ¿cuál es la ecuación que modela la situación?

4. En cierto día, un dólar (US$) equivale a 17.80 pesos ($), y un perfume cuesta US$75.50.
   a) ¿Cuánto cuesta el perfume en pesos?
   b) Completen la tabla 2.4 con los precios en pesos de algunos productos cuyo precio está en dólares.

Tabla 2.4 Precios en dólares y en pesos

Producto	Chocolate	Cartera	Reloj
Precio (US$)	2.25	12.55	145.80
Precio ($)			

* Reúnanse con otra pareja y comparen las soluciones a los problemas.

5. Trabajen en equipo. Propongan una situación, diferente a las estudiadas en esta secuencia, en la que se aplique un número decimal como un operador multiplicativo. Sugieran cuatro cantidades diferentes a las que se aplique el mismo operador y hagan una tabla. Escriban la ecuación que modela la situación y hagan una tabla. Por último, escriban la ecuación que modele la situación.

* Reúnanse con otro equipo e intercambien sus ejemplos. ¿Están o no de acuerdo con el ejemplo y las soluciones? ¿Por qué?

En otras palabras

Un **operador** es una expresión que indica que debe llevarse a cabo una operación determinada sobre diferentes números. Por ejemplo: "Multiplicar por 3" (operador multiplicativo) indica que dado un número hay que multiplicarlo por 3; otro es "Dividir por 2 y sumar 1". Los operadores también se pueden expresar simbólicamente, por ejemplo: "A x se le aplica el operador $3x$"," A x se le aplica el operador $\frac{x}{2}+1$.

Sesión 2. La división entre números decimales

Actividad

α Trabajen en parejas. Lean y resuelvan cada situación.

1. Un metro de tela cuesta $80.50.
   a) Se compró una cantidad de tela por $241.50. ¿Cuántos metros de tela se compraron?
   b) Si la cantidad que se pagó fue de $378.35, ¿cuántos metros de tela se compraron?
   c) ¿Cuál es el factor por el que debe multiplicarse el precio de la compra para conocer la cantidad de tela comprada?
   d) Llenen la tabla 2.5 con los valores que faltan.

Tabla 2.5 Costo y cantidad de una tela

Costo de la tela ($)	80.50	402.50	805.00	1207.50
Cantidad de tela (m)	1			

2. Un bote de pintura con capacidad de 1 L sirve para cubrir 5.7 m^2 de pared.
   a) Si una pared tiene una superficie de 25.65 m^2, ¿cuántos litros de pintura se necesitan para cubrirla?
   b) ¿Por cuál número decimal debe multiplicarse 25.65 para hallar la solución de la pregunta del inciso anterior?
   c) Completen la tabla 2.6 con los valores que faltan.

Tabla 2.6 Pintura y superficie para pintar

Superficie que se va a pintar (m^2)	5.7	11.4	20.00	25.65
Cantidad de pintura (L)	1			

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten sobre el significado del operador inverso y su relación con la división.

σ Dado un operador multiplicativo de la forma: "Multiplicar la cantidad x por d da como resultado el valor y", una pregunta importante es: ¿Cuál es el operador que dado el valor de y recupera el valor x? La respuesta es "Multiplicar la cantidad y por $\frac{1}{d}$ da como resultado x". El valor $\frac{1}{d}$ se llama el inverso multiplicativo de d, ya que cumple la propiedad: $d \times \frac{1}{d} = 1$.

En la secuencia 1 de este libro trabajaron con la fracción inversa multiplicativa de una fracción; en esta actividad calcularán el inverso multiplicativo de un número decimal (en lo sucesivo le llamaremos simplemente inverso).

Actividad

Formen otras parejas y hagan lo que se pide.

3. En cada inciso, expresen el número decimal dado como una fracción decimal.

i) 0.4 = iii) 0.12 = v) 1.234 =

ii) 3.4 = iv) 4.25 = vi) 18.312 =

a) Escriban el inverso de cada uno de los siguientes números decimales. Utilicen calculadora y redondeen a dos cifras decimales.

i) El inverso de 0.4 es ____________ iv) El inverso de 4.25 es ____________

ii) El inverso de 3.4 es ____________ v) El inverso de 1.234 es ____________

iii) El inverso de 0.12 es ____________ vi) El inverso de 18.312 es ____________

b) ¿Cuál es el resultado de multiplicar un número decimal por su inverso? Argumenten con un ejemplo.

* Comparen sus respuestas con otro equipo y discutan: ¿por qué en algunos incisos el producto del número dado por su inverso no da exactamente 1?

El **inverso multiplicativo** de un número decimal a es un número decimal b que cumple la igualdad $a \times b = 1$.

La división de números decimales

Una forma de entender la división entre dos números decimales es la siguiente.

Dividir un número decimal N entre un decimal d es lo mismo que multiplicar N por el inverso de d.

Analicen cada situación y hagan lo que se indica.

4. Para hacer las siguientes divisiones de números decimales hagan los siguientes pasos:

   a) Determinen el inverso multiplicativo del denominador.
   b) Multipliquen el numerador por el valor encontrado (es decir, por el inverso multiplicativo del denominador).

   i) $\frac{4.5}{2.5} =$ ii) $\frac{3.68}{1.6} =$ iii) $\frac{1.2}{0.04} =$ iv) $\frac{1.5}{0.003} =$

5. Si quieren dividir una fracción entre un decimal, se siguen los mismos pasos. Hagan las siguientes divisiones.

   a) $\frac{2}{3} \div 0.25 =$ b) $\frac{1}{2} \div 1.6 =$ c) $\frac{3}{4} \div 0.04 =$ d) $\frac{5}{8} \div 0.125 =$

6. El mismo procedimiento funciona para dividir un número decimal entre una fracción. Hagan las siguientes divisiones.

   a) $4.8 \div \frac{2}{3} =$ b) $1.5 \div \frac{1}{2} =$ c) $9.9 \div \frac{3}{4} =$ d) $4.8 \div \frac{5}{8} =$

* Comparen sus respuestas con el grupo. Si no coinciden, revisen y argumenten su procedimiento hasta llegar a un acuerdo sobre la respuesta correcta.

Problemas

Trabajen en equipo y resuelvan los problemas. (Usen calculadora).

7. El salario mínimo en 2018 ha sido de \$88.36 por día.

   a) Si una persona que está contratada con salario mínimo recibió \$2 650.80, ¿cuántos días de trabajo le pagaron? ____________________

b) Si recibió \$4 152.92, ¿cuántos días de trabajo le pagaron? ______

c) Llenen la tabla 2.7 con los valores que faltan.

Tabla 2.7 Cantidad recibida por días de trabajo

Cantidad recibida (\$)	88.36	618.52	2 650.80	32 251.40
Días de trabajo	1			

d) ¿En qué inciso de los anteriores emplearon el inverso multiplicativo de 88.36?

______

8. Un metro de tela cuesta \$43.70.
   a) Si alguien pagó \$1 529.50, ¿cuántos metros de tela compró? ______
   b) Si alguien pagó \$764.75, ¿cuántos metros de tela compró? ______
   c) Si y representa los metros de tela que se compran y x la cantidad que se paga por ellos, escriban la ecuación que modela la situación.

   ______

9. Un litro de vino cuesta \$215.60.
   a) En una compra se pagaron \$754.60. ¿Cuántos litros de vino se compraron?

   ______

   b) Otra compra costó \$970.20. ¿Cuántos litros de vino se compraron? ______
   c) Si y representa los metros de tela que se compran y x la cantidad que se paga por ellos, escriban la ecuación que modela la situación. ______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten la utilidad de usar el inverso multiplicativo en cada problema y su relación con la división.

ω Formen equipos y hagan lo que se pide.

10. Propongan una situación diferente a las estudiadas en esta secuencia en la que se aplique un operador inverso. Sugieran cuatro cantidades diferentes a las que se aplique el mismo operador inverso y hagan una tabla. Por último, escriban la ecuación que modela la situación. ______

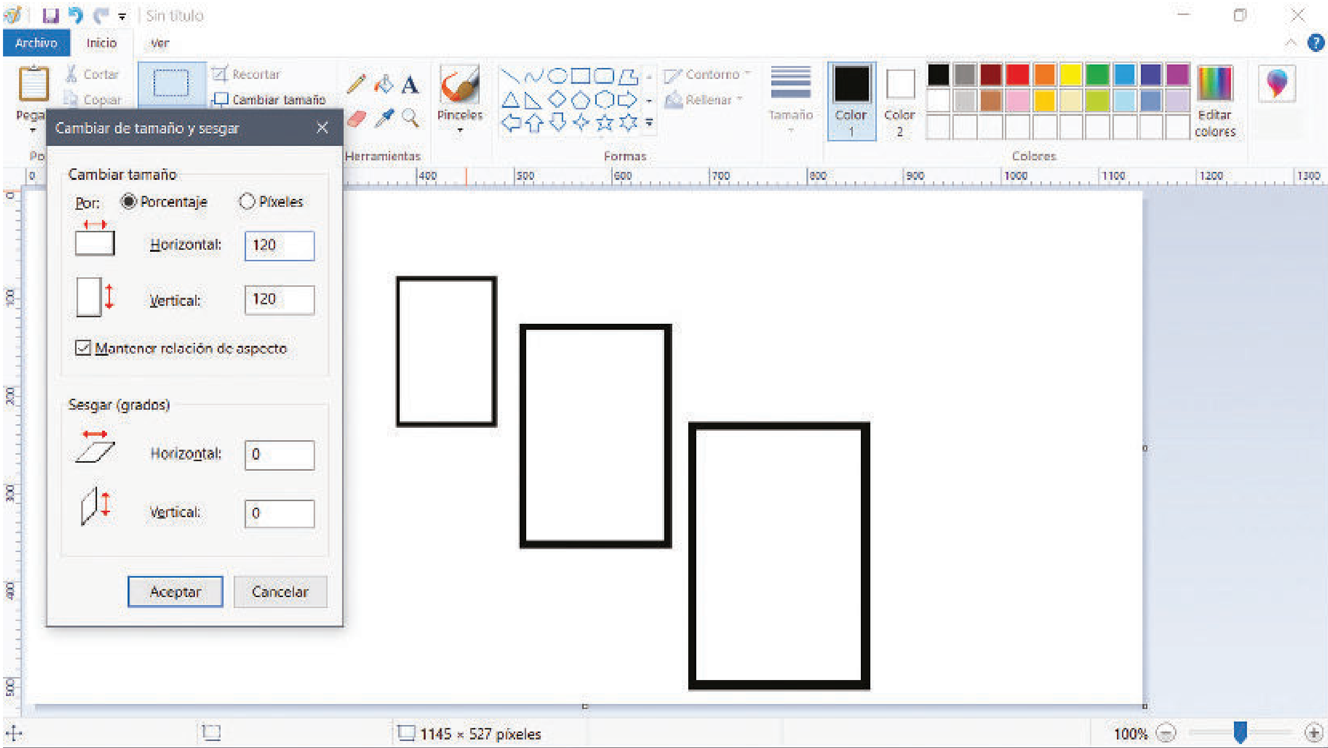
* Reúnanse con otro equipo e intercambien sus ejemplos; digan si están o no de acuerdo con el ejemplo y las soluciones. Discutan sobre el resultado de multiplicar un número por su inverso multiplicativo y una manera sencilla de expresarlo.

Sesión 3. Dos constantes de proporcionalidad

α Lean la información y hagan lo que se indica.

1. La mayoría de los programas para editar imágenes, tienen herramientas para dibujar e insertar dibujos publicados en otros medios. Una característica interesante de esta herramienta es que las figuras pueden ser modificadas de diversas maneras.

   Dentro del menú principal se encuentra el comando *Cambiar tamaño*. Al elegir este comando se abre una ventana con el número 100 (figura 2.3), el cual podemos modificar colocando cualquier número entre 1 y 500. Si se quiere modificar el tamaño de una figura, primero se enmarca, se elige el comando *Cambiar tamaño* y se escribe un número entero N entre 1 y 500; entonces, se crea una nueva figura con dimensiones tales que, por cada 100 unidades de la original, se sustituyen N unidades en la nueva figura (escala 100: N o 1: $\frac{N}{100}$), es decir, en la figura modificada, sus dimensiones son proporcionales a las originales.



a) Cuando se pone en la ventana del programa 120, se hace una amplificación en la que por cada 100 unidades de la figura original se ponen 120 unidades de la figura transformada; esto significa que se multiplica cada unidad por $\frac{120}{100} = 1.2$. En la tabla 2.8 indiquen la cantidad por la que se tiene que multiplicar una unidad cuando en la ventana se coloca el valor de la primera fila de la tabla.

Figura 2.3 Pantalla de un editor de imágenes en la que se modificó el tamaño de la figura original de 100 a 150 y de la segunda a la tercera de 100 a 120

Tabla 2.8 Dimensiones de una figura modificada y la constante de proporcionalidad

Por cada 100	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Por cada unidad						1.2			

b) Si se cambia el tamaño de una figura de 100 a 150, y la figura resultante se transforma de 100 a 120, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que lleva de la primera a la tercera figura? ______

c) Si una figura se amplía de 100 a 250, y la resultante se contrae de 100 a 40, ¿cuál es la constante de proporcionalidad que lleva de la primera a la tercera figura? ______

En otras palabras

La constante de proporcionalidad indica el número decimal por el que debemos multiplicar cada unidad del original para obtener el tamaño de la parte correspondiente de la figura modificada.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Expliquen por qué se obtiene la unidad en el resultado del último inciso. De ser posible, verifiquen sus respuestas trabajando en un programa para editar imágenes.

La proposición "Si A es proporcional a B y B es proporcional a C, entonces A es proporcional a C" se cumple si las constantes de proporcionalidad se expresan en fracciones (como en la secuencia 1) o en números decimales; además, el factor de proporcionalidad para pasar de A a C es el producto del factor de A a B por el factor de B a C. Consideren este análisis para resolver el siguiente problema.

Problemas

Formen parejas, analicen el problema y hagan lo que se pide.

2. En una tienda de ropa se ofrece un descuento general del 20%, además las prendas con etiqueta roja tienen un descuento adicional del 15%.
   a) Una persona dice que entonces las prendas con etiqueta roja tienen el 35% de descuento, ¿es esto cierto? Discutan y argumenten sus respuestas.
   b) ¿Cuál es el número decimal por el que se debe multiplicar el precio de una prenda para encontrar el precio con el primer descuento? ________
   c) ¿Por cuál número decimal debe multiplicarse el precio que resulta después de aplicar el primer descuento, para encontrar el precio con el segundo descuento? ________
   d) ¿Cuál es el número decimal por el que debe multiplicarse el precio original de una prenda para obtener el precio con ambos descuentos? ________
   e) Una camisa cuesta $890.00. ¿Cuál es su precio con los dos descuentos? ________

* Comparen sus respuestas con otras parejas. Analicen cuál es la diferencia entre sumar y multiplicar los dos descuentos antes de aplicarlos. Mencionen ejemplos.

Formen equipos y hagan lo que se pide.

3. Propongan una situación sobre proporcionalidad diferente a las estudiadas en esta secuencia en la que se multipliquen dos o más operadores.

* Intercambien sus propuestas con otro equipo. Digan si están o no de acuerdo con el ejemplo, su solución y la forma de aplicar los factores de proporcionalidad.

Retomando una mirada previa

1. En la sección *Una mirada previa* se formuló el problema de encontrar las longitudes de algunos lados de las piezas del tangram que forman un cuadrado de 9 cm de lado, sabiendo las medidas de los lados de las piezas de un tangram más grande que forman un cuadrado de lado 15 cm.

   En la segunda fila de la tabla 2.9 se pusieron el lado del cuadrado del tangram de la figura 2.1b y las literales que representan los lados de las piezas cuyo valor se debe encontrar.

   a) Completen la tabla 2.9 con los datos correspondientes del tangram de la figura 2.1a.

Tabla 2.9 Dos tangram de diferente tamaño

Datos del tangram (figura 2.1a)			
Datos del tangram (figura 2.1b)	9	a	b

b) Elijan un número que multiplicado por 15 de como resultado 9.

i) $\frac{15}{9} = 1.66\ldots$

ii) $\frac{9}{15} = 0.6$

iii) $\frac{15-9}{9} = 0.66\ldots$

iv) $\frac{15-9}{15} = 0.4$

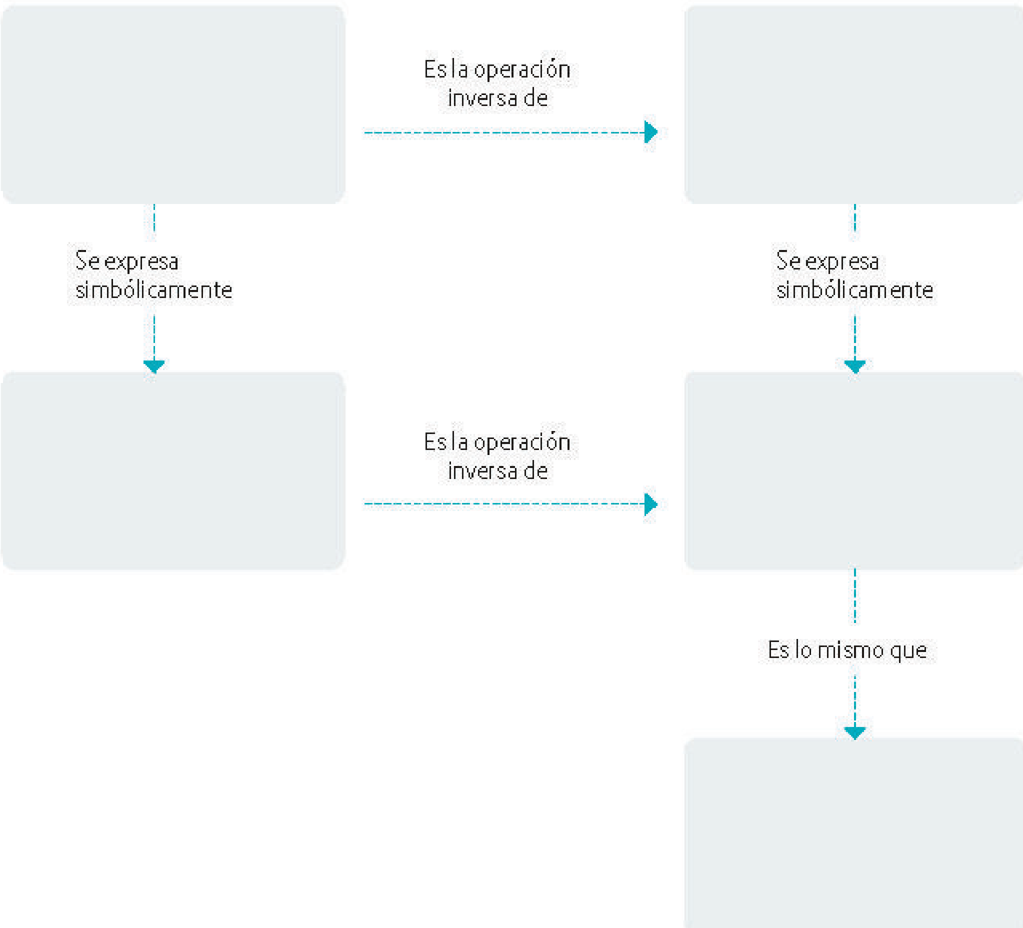
c) Utilicen el valor del inciso b para hallar los valores de a y b.

* Reúnanse en equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten sus procedimientos; en particular verifique que los valores que encontraron cumplan la siguiente ecuación $2a + b = 9$, que se deriva de ver el lado inferior del tangram en la figura 2.1.

En retrospectiva

Escriban cada una de las siguientes expresiones en un recuadro del esquema que se presenta más adelante, de manera que muestre las relaciones pertinentes entre los conceptos. Las letras A, B y d representan números decimales.

- Multiplicar A por d y obtener B.
- $B = A \times d$
- Dividir B entre d y obtener A.
- $B \div d = A$
- Multiplicar B por el inverso de d.



Esquema 2.1 Mapa conceptual de la multiplicación por factores inversos

¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente los problemas.

1. Un jugo se vende en paquetes de seis botellas de 0.325 L cada una. ¿Qué cantidad de líquido se vende en un paquete?
   a) Si un paquete cuesta $45.00, ¿cuánto cuesta cada botella? ______
   b) ¿Cuál es el precio de un litro de jugo dentro de un paquete de seis botellas?
   ______

2. Se quiere hacer una ampliación de una figura, de manera que a cada unidad de la original le correspondan 5.4 u de la ampliación. Sin embargo, el dispositivo para hacerlo tiene un rango de ampliaciones sólo de 1 a 3. Expliquen qué factores pueden aplicarse para resolver el problema, dado el rango del dispositivo.

3. Un automóvil viaja en línea recta con una velocidad constante de 74.5 km/h.
   a) ¿Qué distancia recorre el automóvil en 3.75 horas? ______
   b) ¿Qué tiempo tarda el automóvil en recorrer 1 341 km? ______
   c) Escriban una ecuación que represente la distancia d en términos del tiempo t.
   ______
   d) Escriban una ecuación que represente el tiempo t de una distancia recorrida d.
   ______

4. En una tienda se ofrece una oferta en la que hay un descuento general de 25%; además, las prendas con etiqueta roja tienen un descuento adicional de 12%.
   a) Una persona dice que las prendas con etiqueta roja tienen 37% de descuento. ¿Es esto cierto? ______
   b) ¿Cuál es el número decimal por el que debe multiplicarse el precio de una prenda para encontrar el precio con el descuento general? ______
   c) ¿Por cuál número decimal debe multiplicarse un precio después de aplicar el descuento general, para encontrar el precio con el segundo descuento? ______
   d) ¿Cuál es el número decimal por el que debe multiplicarse un precio para obtener el precio con ambos descuentos? ¿Representa un descuento del 37%?
   ______
   e) Un pantalón cuesta $630.00. ¿Cuál es su precio si se le aplican los dos descuentos? ______

* Reúnanse con otro compañero y comparen las respuestas a los problemas anteriores. Si no coinciden, analicen cómo aplicaron los factores de proporcionalidad en cada caso; en el problema 4, revisen si sumaron o multiplicaron los dos números decimales que escribieron en los incisos **b** y **c**.

Reglas de los signos para multiplicar y dividir números enteros

BLOQUE 1

S3

Formen parejas y hagan lo que se pide

1. El clima en la Antártida puede ser muy variable, y las condiciones climáticas a menudo pueden cambiar dramáticamente en periodos cortos de tiempo. En uno de estos días en una región de esa zona de la Tierra, se llevó a cabo un registro. Durante 24 horas se observó que de manera regular la temperatura fue disminuyendo 2 °C por hora. Al medio día se registraron −25 °C.

   a) ¿Qué temperatura se registró a las 20 horas (8 de la noche) de ese día? Escriban la expresión aritmética que resuelve el problema. ______________

   b) ¿Qué temperatura se registró a las 0 horas, cuando se comenzó el registro? Escriban la expresión aritmética que resuelve el problema. ______________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si hay operaciones que no sepan hacer, anoten sus dudas y traten de resolverlas conforme avancen en la secuencia.

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

En otras palabras

La Antártida es una porción de territorio ubicado en el polo sur del planeta y se conoce también como "el continente helado" por ser la zona sobre la Tierra con las temperaturas más bajas.

Sesión 1. Multiplicación de números enteros

El producto de dos números naturales es una suma repetida, en la que un factor se suma tantas veces como indica el otro; esta propiedad de los números naturales se puede representar de la siguiente manera:

$$ab = \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{(a \text{ veces})} = \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{(b \text{ veces})}$$

La multiplicación de un número positivo por un número negativo se puede determinar haciendo un procedimiento análogo. En la siguiente actividad aplica la misma idea.

α

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. Realicen las siguientes multiplicaciones como suma repetida de uno de los factores.

   a) 3(-4) =
   b) 5(-6) =
   c) 7(-2) =
   d) 8(-3) =

2. Realicen las siguientes multiplicaciones y den razones para justificar su respuesta.

   a) $-4(4) =$ b) $-5(6) =$ c) $-2(3) =$ d) $-3(7) =$

3. Escriban una V si la proposición es verdadera y una F si es falsa.

   a) El producto de un número positivo por un número negativo es un número positivo. ______

   b) El producto de un número positivo por un número negativo es un número negativo. ______

   c) El producto de un número negativo por un número positivo es un número positivo. ______

   d) El producto de un número negativo por un número positivo es un número negativo. ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten sus respuestas hasta llegar a una conclusión satisfactoria.

σ Hasta ahora han determinado el resultado de un número positivo por uno negativo o de un número negativo por uno positivo. Pero es posible que se pregunten: ¿tiene sentido multiplicar dos números negativos? Si es el caso, ¿cómo hallar el producto de dos números negativos? En la siguiente actividad podrán avanzar en las respuestas a dichas preguntas.

Problemas

En equipo resuelvan lo siguiente.

4. ¿Cuál es la sucesión que resulta de hacer las operaciones en cada caso? Anótenla.

a)

5×3	5×2	5×1	5×0	$5 \times (-1)$	$5 \times (-2)$	$5 \times (-3)$	$5 \times (-4)$	$5 \times (-5)$
15								

b)

-4×4	-4×3	-4×2	-4×1	-4×0	$-4 \times (-1)$	$-4 \times (-2)$	$-4 \times (-3)$	$-4 \times (-4)$
-16								

c)

$-8(5)$	$-8(4)$	$-8(3)$	$-8(2)$	$-8(1)$	$-8(0)$	$-8(-1)$	$-8(-2)$	$-8(-3)$
-40								

d)

$-2(-4)$	$-2(-3)$	$-2(-2)$	$-2(-1)$	$-2(0)$	$-2(1)$	$-2(2)$	$-2(3)$	$-2(4)$
8								

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus soluciones. En caso de diferencias revisen sus procedimientos y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Formen equipos y hagan lo que se pide.

ω

5. Completen la tabla de manera que exprese las leyes de los signos para la multiplicación. En cada celda escriban la expresión que resulta de multiplicar el número que encabeza la columna por el que encabeza la fila.

×	$+a$	$-b$
$+c$		
$-d$		

6. Completen las frases que se refieren a cada entrada:
   a) Un número positivo por un número positivo es igual a un número ___________.
   b) Un número positivo por un número negativo es igual a un número ___________.
   c) Un número negativo por un número positivo es igual a un número ___________.
   d) Un número negativo por un número negativo es igual a un número ___________.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten con base en lo visto en la Sesión 1 hasta llegar a un acuerdo.

Sesión 2. División de números enteros

Actividad

α

De forma individual haz lo siguiente.

1. En la contabilidad de una empresa, las cantidades de dinero que egresan se representan con números negativos y las cantidades que ingresan se representan con números positivos. Al utilizar los signos no es necesario especificar en las notas contables si una cantidad en los registros es egreso o ingreso. Supón que el balance de una transacción anual es de $–84000.00 la cual se repartirá en los 12 meses del año.
   a) ¿Cuánto se ejercerá mensualmente? (“Ejercer” quiere decir que se pagará o se cobrara según el signo de las cantidades resultantes) ___________
   b) ¿Qué operación realizaron para determinar la respuesta? ___________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus respuestas. En particular comenten si les parece natural en esta situación utilizar cifras negativas.

σ

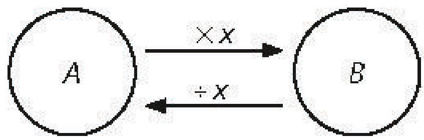
Por los temas que estudiaron en primer grado saben que el producto y la división de números naturales son operaciones inversas. Supongamos que A, B y x son tres números y x es un número diferente de cero. Que la multiplicación y la división sean operaciones inversas quiere decir que:

- Si A se multiplica por x y da como resultado B, entonces B se divide por x y da como resultado A.

E inversamente:

- Si B se divide por x y da como resultado A, entonces A se multiplica por x y da como resultado B.

Lo anterior se representa esquemáticamente en el siguiente diagrama:

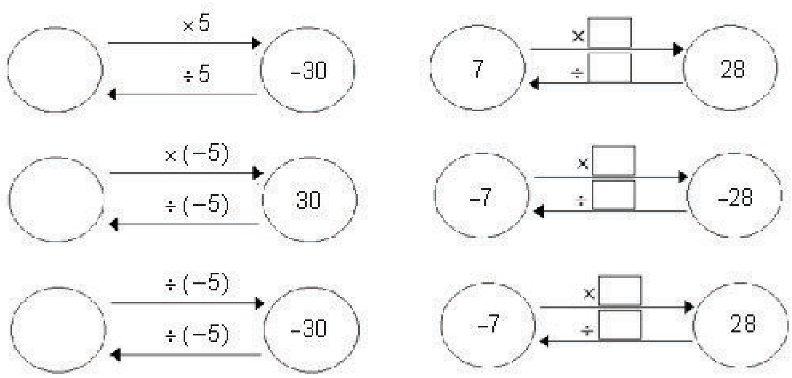


En muchos problemas se conocen dos de las tres cantidades que intervienen, y la operación que los une (multiplicación o división), entonces se puede encontrar la tercera. En la siguiente actividad van a generalizar la relación anterior para números positivos y negativos.

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

2. Utilicen los diagramas para hacer lo que se indica.
   a) En cada uno de los siguientes diagramas encuentren el número que falta, tengan cuidado al determinar si el número que falta es positivo o negativo.
   b) Con base en la manera en que llenaron los diagramas, escriban el resultado de las siguientes divisiones:



i) $-30 \div 5 =$ | iii) $-30 \div (-5) =$ | v) $-28 \div 4 =$

ii) $30 \div (-5) =$ | iv) $-28 \div (-4) =$ | vi) $28 \div (-4) =$

   c) Con base en lo que observaron en los incisos **a** y **b**, indiquen con una **V** si la proposición es verdadera y con una **F** si es falsa.

i) El resultado de dividir un número positivo entre un número negativo es un número positivo. ________________

ii) El resultado de dividir un número positivo entre un número negativo es un número negativo. ________________

iii) El resultado de dividir un número negativo entre un número positivo es un número positivo. ________________

iv) El resultado de dividir un número negativo entre un número positivo es un número negativo. ________________

v) El resultado de dividir un número negativo entre un número negativo es un número positivo. ________________

vi) El resultado de dividir un número negativo entre un número negativo es un número negativo. ________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten sus respuestas hasta llegar a un acuerdo. Después en reunión grupal podrán verificarlo.

Problemas

Hagan en equipo lo siguiente.

3. Las sucesiones de divisiones en cada uno de los siguientes incisos generan una sucesión de números que incluyen números positivos y negativos. Determinen las sucesiones escribiendo el resultado de cada división

a)

$16 \div (-4)$	$12 \div (-4)$	$8 \div (-4)$	$4 \div (-4)$	$0 \div (-4)$	$-4 \div (-4)$	$-8 \div (-4)$	$-12 \div (-4)$	$-16 \div (-4)$
-4								

b)

$-24 \div 3$	$-18 \div 3$	$-12 \div 3$	$-6 \div 3$	$0 \div 3$	$6 \div 3$	$12 \div 3$	$18 \div 3$	$24 \div 3$
-8								

c)

$-84 \div (-7)$	$-63 \div (-7)$	$-42 \div (-7)$	$-21 \div (-7)$	$0 \div (-7)$	$21 \div (-7)$	$42 \div (-7)$	$63 \div (-7)$	$84 \div (-7)$
12								

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Verifiquen que si se determina correctamente el signo de los resultados de la división, las sucesiones formadas son lineales (es decir, tales que la diferencia entre dos elementos sucesivos es constante).

4. Hagan las siguientes divisiones.

a) $72 \div 8 =$

b) $(-72) \div 8 =$

c) $72 \div (-8) =$

d) $(-72) \div (-8) =$

5. Consideren el diagrama al inicio del desarrollo (página 36). Para cada uno de los incisos, encuentren el valor de x para las cantidades asignadas a A y B. Sean cuidadosos con el signo del valor de la x que encuentren y verifiquen que se cumplen las leyes de los signos para el producto.

a) A = 15, B = 60, x = B ÷ A =
b) A = −21, B = 105, x = B ÷ A =
c) A = 18, B = −108, x = B ÷ A =
d) A = −32, B = −128, x = B ÷ A =

6. En una cámara de enfriamiento baja la temperatura a razón de 2 °C por minuto. Si la temperatura que registra es de 16 °C. ¿En cuántos minutos llegará a 6 °C bajo cero? Escribe la operación que resuelve el problema.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten con base en lo visto en la Sesión 1 hasta llegar a un acuerdo.

Jerarquía de las operaciones con números enteros

En el curso de Matemáticas de primer grado se estudió la forma de deshacer paréntesis en operaciones que combinan multiplicaciones con divisiones, en particular se llegó a formular la propiedad distributiva, que dice que si a, b, y c son tres números naturales se tiene que:

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

¿La anterior propiedad es cierta para números positivos y negativos? Realiza la siguiente actividad.

Actividad

Formen equipos y hagan lo que se pide.

7. Eliminen los paréntesis en las siguientes operaciones.

a) 5(8 − 9)=
b) −3(6 − 4)=
c) −9(18 + 4)=
d) −2(−12 − 2)=

8. En cada inciso encuentren el resultado para cada valor dado.

a) 5(8 − 9)=
b) −3(6 + 4)=
c) −9(9 + 4)=
d) −2(−3 − 1)=

9. Encuentren el resultado de las siguientes expresiones aritméticas.

a) −3(6 − 9) (8 − 4)=
b) 5(6 − 9) ÷ (−3 + 18)=
c) −2(−3 − 1) (3 − 7)=
d) −7(9 − 4) ÷ (12 − 7)=

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo. Para verificar sus respuestas.

Una vez que hayan aplicado las leyes de los signos verifiquen en la calculadora que lo hicieron correctamente y propongan nuevas parejas de números positivos y negativos para que encuentren las regularidades de los signos de los factores en las multiplicaciones. Para esto propongan parejas (tercias, cuartetas, etcétera) de números combinando números con igual signo y/o alternando positivos y negativos y anticipen el signo del resultado, después verifiquen en la calculadora.

Hay una gran variedad de calculadoras y hay que averiguar cómo se introducen los números negativos, aquí vamos a ilustrar la calculadora virtual que se puede subir en la pantalla de cualquier computadora (figura 3.1).

Para introducir la operación:

$$-3\,(6-9)(8-4)$$

Se teclea de la misma manera en la que está la expresión agregando el signo "x" donde debe ir:

−	3	×	(	6	−	9	)	×	(	8	−	4	)	=

En esta versión de calculadora es importante anotar el signo ×, aunque no se anoten en la expresión.

10. Hagan las siguientes divisiones con la calculadora, anticipen cuál será el signo del resultado, después verifiquen con el resultado de la calculadora.

a) $198/(-18)=$

b) $(-72)/3=$

c) $105/(-7)=$

d) $(-162)/(-9)=$

Vuelvan a hacer, ahora con la calculadora, el problema 11 y verifiquen si las respuestas que dieron coinciden con las que se obtienen con la calculadora. En caso de que no coincidan revisen sus procedimientos, tanto en las operaciones a lápiz como en lo que hicieron en la calculadora.

Figura 3. 1 Cadena de operaciones en la calculadora

Retomando una mirada previa

Recuerden el problema

"El clima en la Antártida puede ser muy variable, y las condiciones climáticas a menudo pueden cambiar dramáticamente en períodos cortos de tiempo. En uno de estos días en una región de esa zona de la Tierra, se llevó a cabo un registro. Durante 24 horas se observó que de manera regular la temperatura fue disminuyendo 2 °C por hora. Al medio día se registraron −25 °C. "

1. Lean la pregunta y hagan lo que se pide:

   a) ¿Qué temperatura se registró a las 20 horas (8 de la noche) de ese día? ¿Cuál de las siguientes expresiones responde la pregunta?

   i) $-25+8\,(+2)=-9$

   ii) $-25+8\,(-2)=-41$

   iii) $-25-8\,(-2)=-9$

   iv) Ninguna de las anteriores

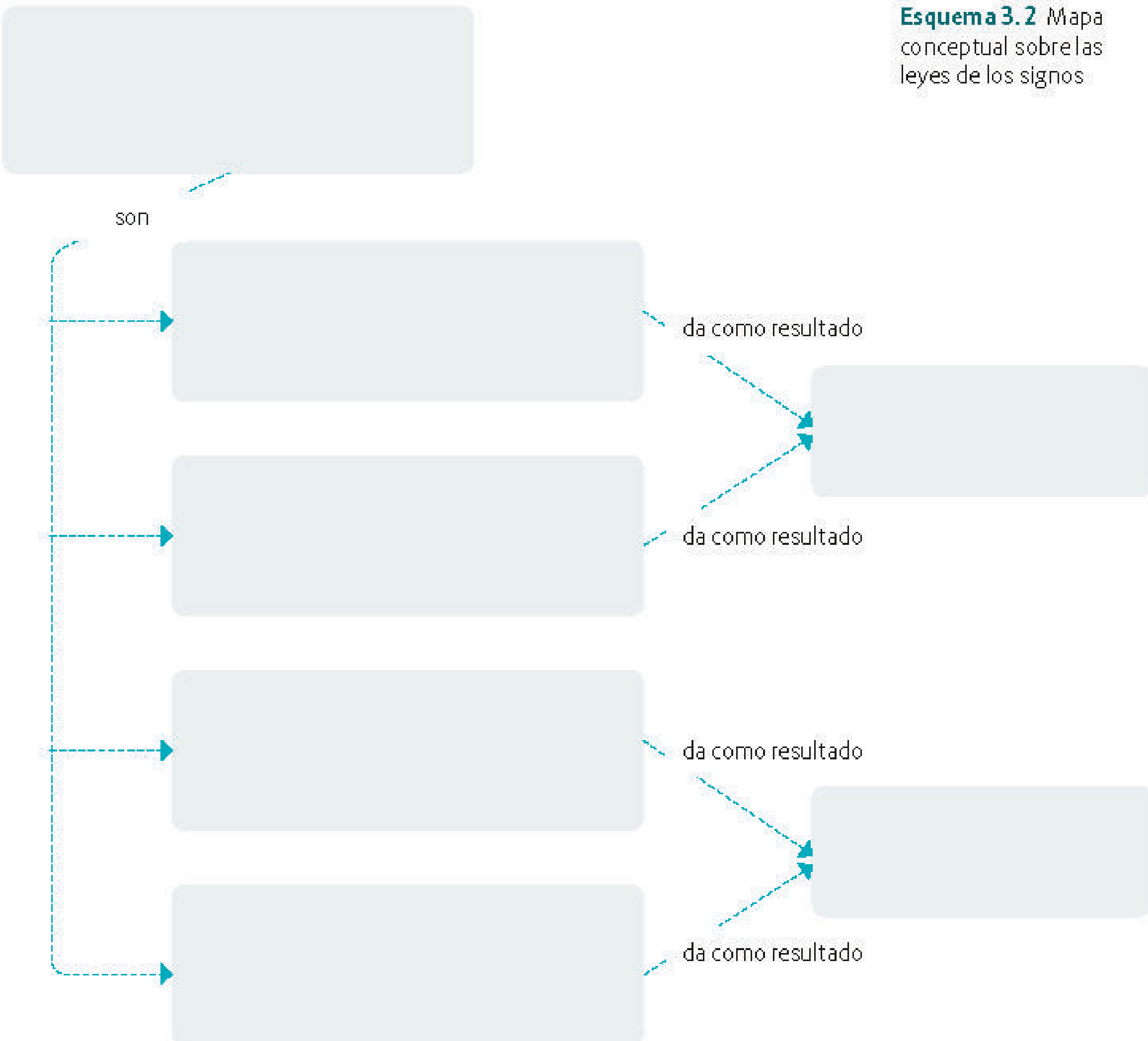
   b) ¿Qué temperatura se registró a las 0 horas, cuando se comenzó el registro? ¿Cuál expresión aritmética responde la pregunta?

* Reúnanse con en equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten su procedimiento hasta llegar a un acuerdo. En particular, comenten la presencia de números negativos en la expresión.

En retrospectiva

Escriban cada una de las siguientes expresiones en un recuadro del esquema que se presenta más adelante, de manera que muestre las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Dividir dos números, ambos con signo positivo o ambos con signo negativo
- Dividir dos números con signos opuestos
- Las leyes de los signos de multiplicación y división de enteros
- Multiplicar dos números, ambos con signo positivo o ambos con signo negativo
- Multiplicar dos números con signos opuestos
- Un número negativo
- Un número positivo



Esquema 3.2 Mapa conceptual sobre las leyes de los signos

¿Qué aprendí?

Trabajen individualmente para resolver los problemas.

1. Encuentren el resultado de las operaciones que se indican.

a) $11(-5) =$ ____________ d) $-18(-4) =$ ____________

b) $4(-16) =$ ____________ e) $-55(-32) =$ ____________

c) $-27(3) =$ ____________ f) $(-25)8 =$ ____________

2. Realicen las divisiones. Pongan atención en colocar el signo apropiado.

a) $\frac{121}{-11} =$ ____________ d) $\frac{-324}{-36} =$ ____________

b) $\frac{-720}{45} =$ ____________ e) $\frac{-325}{13} =$ ____________

c) $\frac{200}{-8} =$ ____________ f) $\frac{-369}{-41} =$ ____________

3. En una empresa un capital de $-250 000.00 se distribuyó entre 5 empresas subsidiarias.

a) ¿Cuánto ejercerá cada subsidiaria? ____________

b) ¿Qué operación realizaron para hallar el resultado? ____________

c) ¿El ejercicio de esa transferencia es una ganancia o una pérdida? Explica.

____

____

4. En cada inciso quita el paréntesis cuidando el manejo de los signos. Después comprueba que la igualdad que obtuviste es cierta para el valor dado.

a) $3(-8 - a) =$ ____________, cuando $a = 5$

b) $-3(b - 7) =$ ____________, cuando $b = -2$

c) $-1(8x - 4) =$ ____________, cuando $x = 3$

d) $-4(-2x - 1) =$ ____________, cuando $x = 5$

5. Encuentren el resultado de las siguientes expresiones aritméticas.

a) $-8(3 - 9)(5 - 6) =$ ____________

b) $5(3 - 5) \div (-2 + 4) =$ ____________

c) $-3(-3 + 1)(3 - 7) =$ ____________

d) $-7(9 - 4) \div (12 - 7) =$ ____________

6. En una cámara de enfriamiento baja la temperatura a razón de 3 °C por minuto. Si la temperatura que registra es de 18 °C. ¿En cuantos minutos llegará a 6 °C bajo cero? Escribe la operación que resuelve el problema. ____________

____

* Reúnanse con un compañero y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

BLOQUE 1

S4

Números positivos y negativos

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. Un tinaco surte agua a razón de 43.5 L por minuto, es decir, pierde 43.5 L cada minuto.
   a) Si el tinaco contiene una cantidad inicial de 983.5 L de agua, ¿cuántos litros de agua tendrá después de 10 minutos? ______
   b) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse? ______
   c) En general, si C_t y C_0 representan, respectivamente, la cantidad final e inicial de agua en el tinaco, t el tiempo en minutos y r la cantidad de líquido que pierde por minuto, ¿cuál es la expresión algebraica que indica la cantidad de agua que se pierde en función del tiempo? ______

* Reúnanse con otra pareja, comparen sus respuestas y tomen nota de las similitudes y diferencias entre ellas. Vuelvan a revisarlas al terminar de estudiar la secuencia.

Sesión 1. Multiplicación de números positivos y negativos

α

Trabajen en parejas. Analicen la situación y hagan lo que se indica.

1. En una región de Alaska, en un momento de cambio climático importante, baja la temperatura a razón de 3.5 °C por hora. Si la temperatura que se registra es 16.8 °C, ¿cuál será la temperatura después de 8.5 horas? Escriban la operación que resuelve el problema. ______

σ

Anteriormente aprendieron que los números enteros son una extensión de los números naturales que se realiza mediante la incorporación del cero y de un número negativo por cada número natural. Esto permitió definir los conceptos de valor absoluto y valor simétrico de un número entero. Ahora aplicarán estas ideas para operar con fracciones y números decimales resolviendo los siguientes problemas y actividades.

Actividad

Formen nuevas parejas y desarrollen las actividades.

2. Respondan las preguntas.
   a) ¿Cuál es el valor simétrico de los números $-\frac{3}{4}$ y 0.75? ______
   b) ¿Cuál es el valor absoluto de los números $-\frac{3}{4}$ y 0.75? ______

* Comparen sus respuestas con las otras parejas. Argumenten y escriban cómo extender el conjunto de las fracciones mediante la incorporación de fracciones con números negativos. De manera análoga comenten la extensión del conjunto de los números decimales mediante la incorporación de números decimales negativos.

3. Para cada uno de los números $-\frac{3}{4}$, 3.14 y –2.17, escriban...

   a) el valor absoluto: ______________________

   b) el valor simétrico: ______________________

4. Escriban en el segundo sumando el número simétrico correspondiente y obtengan el resultado de la suma.

   a) $-\frac{3}{4} + (\quad) =$ ______ b) $3.14 + (\quad) =$ ______ c) $-2.17 + (\quad) =$ ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. En caso de no coincidir, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo.

Para utilizar con provecho el concepto de valor simétrico de un número conviene tener presente sus propiedades, dos de ellas son las siguientes:

a) La suma de un número más su simétrico es cero.

b) El simétrico del simétrico de un número es el mismo número.

c) El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su simétrico.

Actividad

Resuelvan individualmente.

5. Utilicen la notación *n* para indicar un número y *simétrico de n* para indicar su valor simétrico. Escriban la expresión simbólica que corresponde a cada propiedad de las mencionadas en el recuadro anterior.

   a) ______________

   b) ______________

6. Frecuentemente al operar con números negativos y combinaciones de positivos y negativos se presentan expresiones con doble signo, como las siguientes. En cada caso, reduzcan los signos y eliminen los paréntesis de manera que se conserve la igualdad. (Recuerden que un número “sin signo” en realidad es un número con el signo “+”.)

   a) $+\left(\frac{3}{2}\right) =$ ______________

   b) $-\left(\frac{3}{2}\right) =$ ______________

   c) $+\left(-\frac{3}{2}\right) =$ ______________

   d) $-\left(-\frac{3}{2}\right) =$ ______________

   e) $+(1.5) =$ ______________

   f) $-(1.5) =$ ______________

* Reúnanse con un compañero. Comparen sus resultados y sus procedimientos. Si no coinciden, argumenten su procedimiento, corrijan si detectan algún error y lleguen a un acuerdo. Luego, entre todos, analicen las operaciones que están al inicio de la siguiente página.

- $+\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, ya que $+1\left(+\frac{3}{2}\right)$, porque el producto de dos números positivos es positivo.
- $-\left(+\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)$, porque $-\left(+\frac{3}{2}\right)$ es el simétrico de $\left(+\frac{3}{2}\right)$ y éste es igual a $\left(\frac{3}{2}\right)$. Pero el simétrico de $\frac{3}{2}$ es $-\frac{3}{2}$, por tanto, $-\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$, pues ambos lados de la igualdad son simétricos a $\frac{3}{2}$.
- $+\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ porque el signo "+" se puede quitar sin afectar el contenido. Los paréntesis pueden omitirse cuando no hay una operación fuera de ellos, es decir, $+\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.
- $-\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, porque el simétrico del simétrico es el número original.

El producto de números positivos y negativos

Las reglas para operar en general números positivos y negativos son análogas a las operaciones de números enteros que se estudiaron en la secuencia 3. Recuerden las siguientes reglas para llevar a cabo operaciones con números naturales y se extienden a números positivos y negativos, en estos casos aplicando las leyes de los signos.

a) Cuando hay paréntesis, primero se hacen las operaciones que están dentro de los paréntesis.
b) Dentro de los paréntesis y en expresiones sin paréntesis, primero se realizan las multiplicaciones y las divisiones.
c) Por último, se hacen las sumas y las restas.

7. ¿Cuál es el resultado de cada de una de las operaciones?

a) $(3)(5) =$ ____________
b) $(-9)(7) =$ ____________
c) $(12)(-3) =$ ____________
d) $(-18)(-5) =$ ____________
e) $\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\right) =$ ____________
f) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right) =$ ____________
g) $\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ____________
h) $\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right) =$ ____________
i) $(1.2)(3.1) =$ ____________

8. ¿Cuál es el resultado de cada operación?

a) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) =$ ____________
b) $\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) =$ ____________
c) $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right) =$ ____________
d) $(2.5)(4) + (0.25)(-8) =$ ____________

9. En la ecuación $y = -\frac{2}{7}x$, ¿cuáles son los valores de y cuando los valores de x son: $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$? Sistematicen sus respuestas en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Valores para y según los valores de x

x	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
y					

10. Debido al calentamiento global de la Tierra, se ha detectado que en una zona del polo norte un iceberg reduce su masa en 2 toneladas cada 5 meses.

a) Si en $t = 0$ la masa inicial del iceberg es de 100 toneladas, ¿cuál será la masa del iceberg después de 50 meses? Para hacerlo llenen la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Valores para la masa M_t (en toneladas) en función del tiempo t (en meses)

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
M_t											

b) Escriban la ecuación de la masa M_t del iceberg con respecto al tiempo. ____________

____

c) ¿Cuánto tiempo tardaría en deshacerse el iceberg si continuara perdiendo 2 toneladas de masa cada 5 meses? ____________________

En otras palabras

Un iceberg es una montaña de hielo flotando en el mar.

* Reúnanse con un compañero. Comparen sus resultados y procedimientos. Si no coinciden, revisen y argumenten su procedimiento hasta llegar a un acuerdo.

11. Formen parejas y hagan lo que se pide

a) Discutan posibles ventajas que proporciona saber multiplicar números positivos y negativos.
b) Den un ejemplo de una situación en la que se requiera multiplicar un número negativo por uno positivo o dos números negativos. ____________

____

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Juzguen si en los ejemplos que proporcionaron los números negativos se presentan de manera natural.

Sesión 2. División de fracciones y decimales positivos y negativos

α Las divisiones tanto de fracciones como de números decimales positivos y negativos se realizan de la misma manera que las divisiones normales, pero ahora operando también con números negativos. Una manera de descubrir cómo se operan los números positivos y negativos en la división es teniendo en mente que es la operación inversa de la multiplicación. Conforme resuelvan la actividad, se darán cuenta de cómo aprovechar dicha idea.

Actividad

En parejas hagan lo que se pide.

1. Sigan el razonamiento y escriban el resultado de cada división sin hacer la operación (cuiden las operaciones de números positivos y negativos).

   a) Como $12 \times 8 = 96$, entonces $96 \div 8 =$ ____________________

   b) Como $(-15) \times 11 = -165$, entonces $-165 \div 11 =$ ____________________

   c) Como $(-13) \times (-9) = 117$, entonces $117 \div (-13) =$ ____________________

   d) Como $(-14) \times 7 = -98$, entonces $-98 \div (-14) =$ ____________________

2. Con base en razonamientos similares a los anteriores, en los incisos completen los espacios vacíos con las fracciones que hacen verdaderas las afirmaciones.

   a) Como $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \square$ entonces $\square \div \frac{3}{7} = \frac{5}{8}$.

   b) Como $\square \times \frac{4}{13} = -\frac{20}{234}$, entonces $-\frac{20}{234} \div \frac{4}{13} = \square$

   c) Como $\left(-\frac{2}{19}\right) \times \square = \frac{6}{209}$, entonces $\frac{6}{209} \div \left(-\frac{2}{19}\right) = \square$

   d) Como $\square \times \left(-\frac{3}{11}\right) = -\frac{15}{462}$, entonces $-\frac{15}{462} \div \left(-\frac{3}{11}\right) = \square$

3. En los siguientes incisos completen los espacios vacíos con los números decimales que hacen verdaderas las afirmaciones.

   a) Como $11.2 \times 7.4 = 82.88$, entonces $82.88 \div 7.4 = \square$

   b) Como $(-1.5) \times 21.1 = -31.65$, entonces $-31.65 \div 21.1 = \square$

   c) Como $(-3.4) \times 7.9 = -26.86$, entonces $-26.86 \div (-3.4) = \square$

   d) Como $(-8.6) \times 12.3 = -105.78$, entonces $-105.78 \div (12.3) = \square$

4. Determinen la fracción resultante de las siguientes divisiones de fracciones, cuiden el manejo de los signos.

a) $-\frac{1}{2} \div \frac{4}{5} =$ ☐

b) $-\frac{3}{7} \div \frac{3}{4} =$ ☐

c) $\frac{4}{5} \div \left(-\frac{8}{9}\right) =$ ☐

d) $-\frac{3}{7} \div \left(-\frac{1}{21}\right) =$ ☐

5. Realicen las siguientes divisiones de números decimales. Utilicen calculadora y tengan cuidado con el manejo de los signos.

a) $3.72 \div 3.1 =$ ☐

b) $-18.2 \div 3.5 =$ ☐

c) $24.42 \div (-7.4) =$ ☐

d) $-34.41 \div (-11.1) =$ ☐

* Reúnanse con otra pareja. Comparen sus resultados y la manera en que aplicaron la relación entre la multiplicación y la división. Si no coinciden, argumenten su procedimiento, corrijan si detectan un error y lleguen a un acuerdo.

Problemas

Resuelvan los problemas de manera individual.

6. A partir de que comienza a funcionar una cámara de enfriamiento, la temperatura baja a razón de 1.6 °C por minuto. Si la temperatura de la cámara cuando inicia el enfriamiento es de 18.8 °C y se detiene cuando alcanza una temperatura de –29.2 °C, ¿cuántos minutos estuvo en funcionamiento? Escriban la operación que resuelve el problema. ______

7. Un tanque contiene 90 L de agua y comienza a recibirla de una llave a razón de 12 L por minuto y al mismo tiempo distribuye (descarga) agua a razón de 18 L por minuto.

a) ¿En cuánto tiempo queda vacío el tanque? ______

b) Escriban la ecuación que representa la cantidad de agua del tanque con respecto al tiempo. Utilicen la letra t para indicar el tiempo en minutos y C_t para la cantidad de agua que tiene el tanque en el minuto t. ______

* Reúnanse con un compañero. Comparen sus resultados y los procedimientos mediante los cuales los obtuvieron. Si no coinciden, argumenten su procedimiento, corrijan si detectan un error y lleguen a un acuerdo.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

8. Hagan lo siguiente:

a) Discutan posibles ventajas de saber dividir números positivos y negativos. Escríbanlas.

b) Den un ejemplo de una situación en la que se requiera dividir un número negativo por uno positivo o dos números negativos.

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Juzguen si en los ejemplos que proporcionaron los números negativos se presentan de manera natural.

Retomando una mirada previa

Formen ternas y hagan lo que se pide.

1. Para responder la pregunta "Si la razón en que surte el agua es de 43.5 L por minuto y al comienzo contiene 983.5 L de agua, ¿cuántos litros de agua contendrá el tinaco después de 10 minutos?"

a) Encuentren la cantidad de litros de agua que tendrá el tinaco en 1, 2 y 3 minutos. Después generalicen y respondan el inciso siguiente.

b) ¿Cuál de las siguientes expresiones modela el problema?

i) $x = 983.5 + 10(43.5)$

ii) $x = 983.5 - 10(-43.5)$

iii) $x = 983.5 - 10(43.5)$

iv) Ninguna de las anteriores

c) ¿Cuál es el resultado que se obtiene?

i) 1370.5

ii) 1360.5

iii) 548.5

iv) Ninguna de las anteriores.

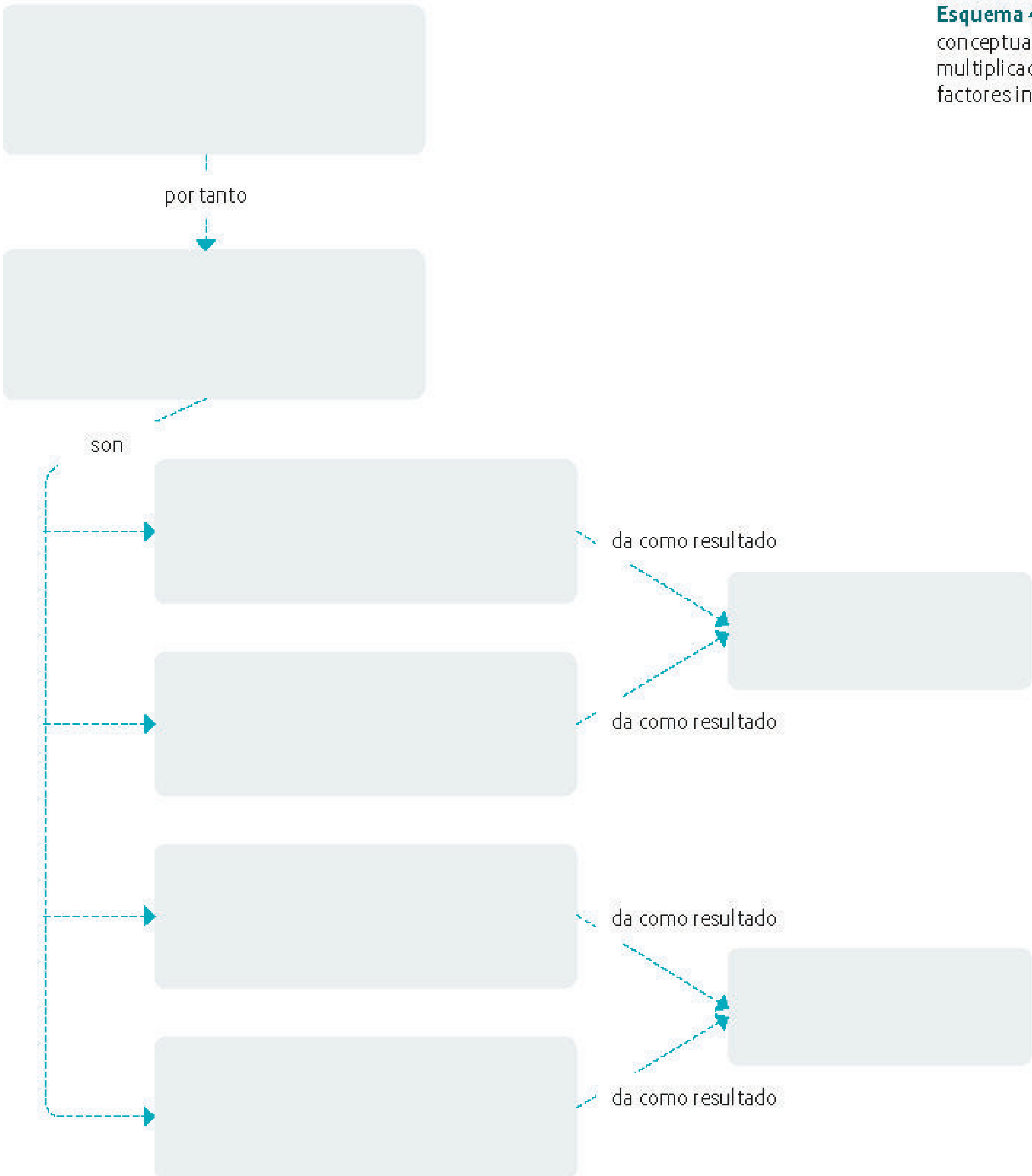
d) ¿Dónde se presentó la oportunidad de multiplicar por un número negativo?

* Reúnanse con otra terna y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo.

En retrospectiva

Escriban cada una de las siguientes frases en un recuadro del esquema 4.1, de manera que muestre las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Dividir dos números positivos o dos números negativos.
- Dividir un número positivo entre uno negativo o un número negativo entre uno positivo.
- Las leyes para multiplicar números positivos y negativos.
- Las operaciones con fracciones y números decimales positivos y negativos siguen las mismas reglas de los signos que los números enteros.
- Multiplicar dos números positivos o dos negativos.
- Multiplicar un número positivo por uno negativo o un número negativo por uno positivo.
- Un número negativo.
- Un número positivo.



Esquema 4.1 Mapa conceptual de la multiplicación por factores inversos

¿Qué aprendí?

1. Elijan la opción que completa correctamente la definición.

   Dada una fracción positiva o negativa, su valor absoluto es...

   a) la misma fracción si es positiva o la fracción simétrica si es negativa. ______
   b) siempre es la fracción simétrica. ______
   c) la fracción simétrica si es positiva o la misma fracción si es negativa. ______

2. Elijan la opción que completa correctamente el enunciado.

   Dada una fracción positiva o negativa, su fracción simétrica es...

   a) la fracción que, sumada a la fracción dada, resulta cero. ______
   b) la fracción que, sumada a la fracción dada, resulta 1. ______
   c) la fracción que, restada a la fracción dada, resulta cero. ______

3. Elijan la opción que complete correctamente el enunciado. Los números decimales se extienden debido a:

   a) la incorporación de las fracciones.
   b) la incorporación de números negativos.
   c) la incorporación de los números enteros.

4. Encuentren el resultado de las multiplicaciones.

   a) $\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ______
   b) $\left(-\frac{11}{6}\right)\left(\frac{7}{8}\right) =$ ______
   c) $\left(-\frac{4}{13}\right)\left(-\frac{7}{12}\right) =$ ______
   d) $(4.2)(-1.6) =$ ______
   e) $(-2.7)(3.5) =$ ______
   f) $(1.1)(-5.4) =$ ______

5. Resuelvan las divisiones. Pongan atención en colocar el signo apropiado. Simplifiquen donde sea necesario.

   a) $\left(-\frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{5}{33}\right) =$ ______
   b) $\left(\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{21}{45}\right) =$ ______
   c) $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \left(\frac{3}{28}\right) =$ ______
   d) $(-43.5) \div (2.5) =$ ______
   e) $(14.04) \div (-1.2) =$ ______
   f) $(-42.5) \div (-12.5) =$ ______

6. Elijan la opción que completa correctamente el enunciado.
   Dado un número decimal positivo o negativo, su valor absoluto es...
   a) el número decimal simétrico si el número decimal es positivo o el mismo número decimal si es negativo. ______
   b) el número decimal simétrico. ______
   c) el mismo número decimal si es positivo o el número decimal simétrico si es negativo. ______

7. Elijan la opción que completa correctamente el enunciado.
   Dado un número decimal positivo o negativo, su simétrico es...
   a) el número decimal que, restado al número decimal dado, da como resultado cero. ______
   b) el número decimal que, al sumarlo con el número decimal dado, resulta cero. ______
   c) el número decimal que, sumado al número decimal dado, resulta 1. ______

8. En la columna de la izquierda se presentan cuatro ecuaciones y en la de la derecha cuatro tablas. Cada tabla corresponde a una ecuación. Relacionen cada ecuación con su respectiva tabla.

a) $y = -\frac{3}{4}x$

b) $y = \frac{4}{3}x$

c) $y = -\frac{4}{3}x$

d) $y = \frac{3}{4}x$

i)

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

ii)

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$

iii)

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	0	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{8}$

iv)

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

BLOQUE 1

S5 Propiedades de figuras geométricas y expresiones algebraicas equivalentes

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica la equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

Trabajen en parejas y hagan lo que se indica.

1. En las dos primeras filas de la tabla 5.1 se representan los números positivos a y b usando segmentos de recta. Usen estos segmentos para representar en la columna derecha de los incisos c y d, cada operación indicada y su resultado. Usen regla y compás.

Tabla 5.1 Descripción y representación de segmentos

Descripción	Representación
a) Número a	————————
b) Número b, menor que a	————
c) $c = a + b$	
d) $d = a - b$	

* Reúnanse con otra pareja y comparen los resultados que obtuvieron en la tabla 5.1. Comenten qué semejanzas y qué diferencias encuentran entre sumar y restar segmentos y las operaciones correspondientes realizadas con números naturales.

Sesión 1. Operaciones con segmentos y su expresión literal

En esta sesión se trabajará con segmentos, los cuales usaremos para representar números positivos. En parejas, desarrollen la actividad 1 y después lean la información del recuadro.

Actividad

Trabajen individualmente.

1. En la figura 5.1 se presenta una suma y una resta con segmentos. Los taches representan el punto donde se apoyó el compás, abierto tanto como la magnitud al sumar o restar. Para sumar se usó la dirección izquierda a derecha, y para restar de derecha a izquierda.

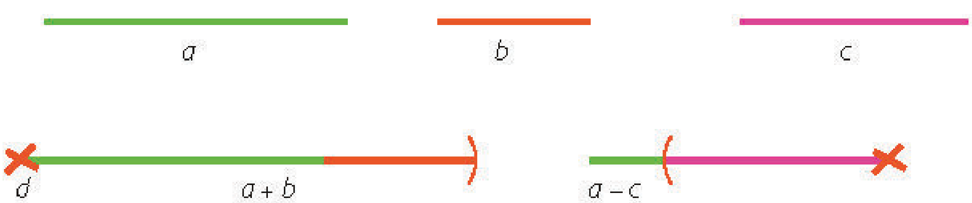


Figura 5.1 Suma y resta con segmentos

a) Dados los números a, b y c, indicados con los segmentos mostrados a continuación, representen en la línea punteada correspondiente las operaciones solicitadas. Pueden usar regla y compás.

a b c

i) $a + b + c$ --

ii) $(a + b) - c$ --

iii) $a + (b - c)$ --

b) ¿Cómo son los segmentos resultantes en ii y iii? ________________

c) Escriban la igualdad de las sumas encontradas. ________________

A continuación, analizarán igualdades de operaciones entre números, en las que utilizarán segmentos para representar las cantidades involucradas. Para efectuar estas operaciones pueden seguir las siguientes reglas.

Reglas de operaciones con segmentos

Para sumar dos segmentos, a y b, se traza horizontalmente el segmento a y en su extremo derecho se traza b, también de manera horizontal. La suma es el segmento que va del punto inicial de a al punto final de b.

Para restar dos segmentos, $a - b$, se traza horizontalmente a; sobre éste, y a partir de su extremo final, se traza b sobre y hacia el extremo inicial. La resta es el segmento que va del punto inicial de a al punto final de b.

Actividad

Trabajen en parejas.

2. Comparen sus respuestas de la actividad 1; pueden usar el compás para hacer las comparaciones. Si existe alguna diferencia, argumenten cómo encontraron las soluciones y traten de llegar a un acuerdo. Si persisten las dudas, anótenlas en su cuaderno para exponerlas en la sesión grupal.

   En los incisos en los que sus respuestas coincidan, escriban un mensaje donde le expliquen a un compañero cómo resolvieron dicho ejercicio.

   a) ¿Sienten que fue más fácil realizar las actividades anteriores trabajando con un compañero o hubieran preferido hacerlas solos?
   b) ¿Qué tan seguros están de que sus respuestas a las actividades anteriores son correctas?

* En sesión grupal, cada equipo describa cómo representaron las expresiones aditivas de las actividades. Las parejas deberán poner atención donde hayan quedado dudas para comprender cuál era el origen de su discrepancia y corregirlo.

En otras palabras

Las **expresiones aditivas** son aquellas que involucran sumas y restas, pero no multiplicaciones ni divisiones.

La **discrepancia** es la diferencia que resulta de comparar dos cosas entre sí; también se refiere a la falta de acuerdo entre dos o más personas acerca de una situación, una decisión o una opinión.

Sesión 2. Expresiones algebraicas de perímetros de figuras geométricas

α Trabajen individualmente.

1. En los diagramas se representan operaciones con segmentos. Úsenlos para expresar algebraicamente la operación que representa cada uno de los segmentos indicados en los incisos **a**, **b**, **c** y **d**.

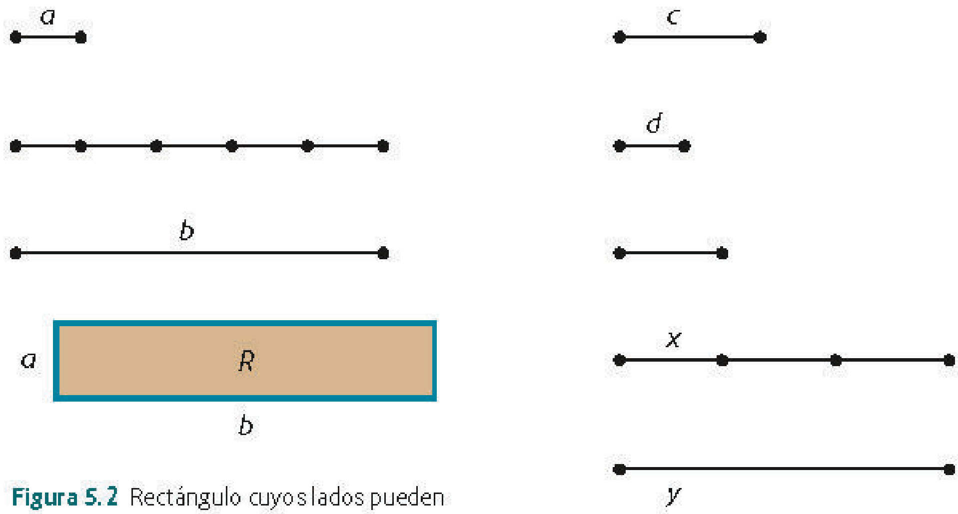


Figura 5.2 Rectángulo cuyos lados pueden respresentarse con operaciones con segmentos

a) $b =$ _______

b) $x =$ _______

c) $y =$ _______

d) Perímetro del rectángulo $R =$ _______

Actividad

σ Trabajen en parejas.

2. Midan los lados del rectángulo de la figura 5.3. Después, en la página siguiente representen con segmentos cada operación indicada.

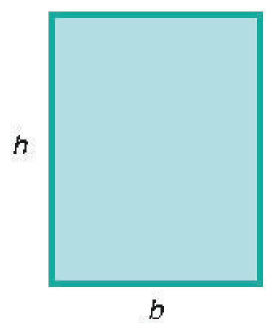


Figura 5.3 Rectángulo de base b y altura h

a) $b + h =$

b) $h + b =$

c) $2h + 2b =$

d) $2(b + h) =$

e) $2(h + b) =$

f) $2b + 2h =$

Problemas

Trabajen individualmente.

3. Escriban tres igualdades que se desprendan de lo estudiado en la actividad 2. Guíense por los segmentos finales que dibujaron en los incisos de la misma actividad. ______

   a) ¿Qué relación tiene cada expresión de las que acaban de escribir con el rectángulo de la figura 5.3? ______

4. Representen con segmentos las operaciones solicitadas en cada caso. Determinen la longitud de los segmentos a, b y c. Usen compás y regla.

   a) $b + c$

   b) $a - (b + c)$

   c) $a - c$

   d) $a - b - c$

   e) ¿Encontraron alguna igualdad entre las operaciones anteriores? Escríbanla con literales. ______

* Reúnanse en parejas y escriban todas las igualdades que encontraron en el trabajo con segmentos en esta sesión y en la sesión 1. En sesión grupal, analicen una de esas igualdades; después discutan si las expresiones que escribieron son expresiones multiplicativas.

Sesión 3. Áreas de figuras y su representación algebraica

α

Actividad

Trabajen en parejas. Usen regla y compás.

1. Obtengan las medidas del rectángulo de la figura 5.4. Dibujen, a la derecha de éste, un rectángulo cuya base mida $a + b$ y altura c.

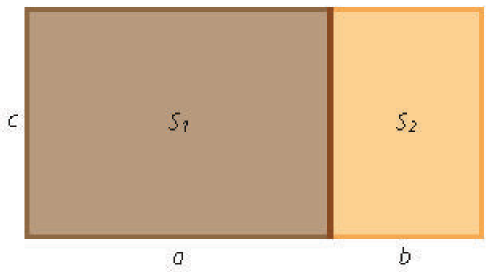


Figura 5.4 Rectángulo formado por los polígonos S_1 y S_2

Problemas

Trabajen individualmente.

2. Escriban las expresiones algebraicas correspondientes a las áreas de los polígonos de la figura 5.4, según se piden en los incisos.

   a) Área de S_1. ____________________

   b) Área de S_2. ____________________

   c) Área total de S. ____________________

3. Completen los enunciados escribiendo en orden inverso los factores que anotaron en la actividad 2 y respondan las preguntas.

   a) El área total de S es ____________________.

   b) El área de S_1 es ____________________.

   c) El área de S_2 es ____________________.

   d) ¿Cambian las áreas por cambiar el orden de los factores? __________

   e) ¿Qué relación encuentran entre las áreas de S, S_1 y S_2? Expliquen.

   ____

   ____

   f) Justifiquen con expresiones algebraicas la relación entre las tres áreas que explicaron en el inciso e.

   ____

   ____

4. Analicen la figura 5.5 y respondan las preguntas.

a) Escriban las expresiones algebraicas correspondientes al área de cada uno de los rectángulos A, B, C y D. Eviten usar el signo $\times$. ______

b) ¿Cuál es el área del rectángulo de base b y altura $d + c$? ______

c) La suma de dos de los rectángulos A, B, C y D es igual al área obtenida en el inciso anterior. ¿Cuáles son esos rectángulos? ______

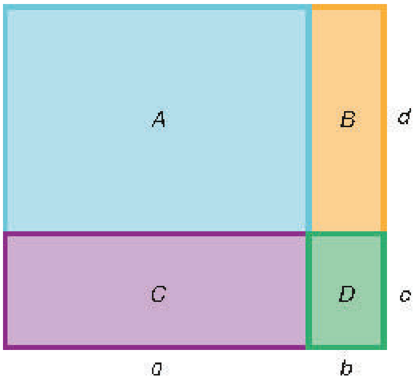


Figura 5.5 Polígono dividido en varios rectángulos

d) ¿Qué igualdad algebraica resulta al relacionar las expresiones que escribieron en los incisos **b** y **c**? ______

e) Escriban una expresión para el área del rectángulo de base a y altura $d + c$. ¿Con qué par de rectángulos es igual esa área? ______

f) Escriban una igualdad que relacione las áreas obtenidas en el inciso anterior. ______

g) ¿Cuál es la expresión para representar el área del rectángulo de base $a + b$ y altura $c + d$? ______

h) Escriban el área del rectángulo anterior como la suma de las áreas de todos los rectángulos que lo componen. ______

i) Escriban una igualdad que relacione las áreas obtenidas en los incisos **g** y **h**. ______

5. En su cuaderno, dibujen rectángulos como los de la figura 5.5, donde a, b, c y d tengan las medidas dadas en cada inciso.

a) $a = 5, b = 2, c = 4, d = 1$.

b) Comprueben con estos datos la igualdad que escribieron en el inciso i de la actividad 4. Repitan el inciso a para los siguientes cuartetos de valores:

i) $a = 4, b = 3, c = 6, d = 5$.

ii) $a = 1, b = 8, c = 5, d = 6$.

6. Analicen la figura 5.6 y comparen las áreas de acuerdo con lo que se solicita en los incisos de la siguiente página.

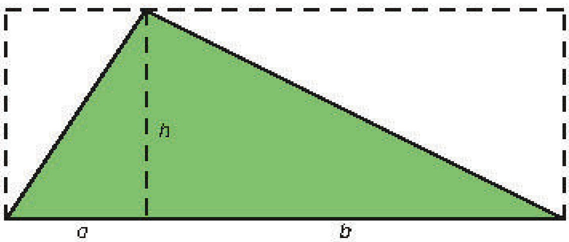


Figura 5.6 Polígonos y áreas que los relacionan

a) ¿Qué expresión representa el área del rectángulo de base $a + b$ y altura h?

b) ¿Qué expresión representa el área del triángulo de base $a + b$ y altura h?

c) ¿Qué expresión representa la igualdad de la suma de las áreas de los rectángulos cuya altura es h y sus bases son a y b, respectivamente, y el resultado que obtuvieron en el inciso **a**?

d) ¿Qué expresión representa la igualdad de la suma de las áreas de los triángulos cuya altura es h y sus bases son a y b, respectivamente, y el resultado que obtuvieron en el inciso **b**?

e) Comprueben todas las expresiones de los incisos $a - d$ con los valores siguientes:

i) $a = 6$, $b = 3$, $h = 5$.

ii) $a = 4$, $c = 5$, $h = 3$.

Actividad

Trabajen en parejas.

7. Revisen los resultados que obtuvieron en las actividades 4 y 5. ¿Coinciden todos? Expliquen. ______

a) Justifiquen las respuestas que no coinciden y descubran los errores que cometieron. Si no llegan a un acuerdo, esperen a la puesta en común al final de la sesión, ahí podrán aclarar sus dudas.

b) Agreguen a la lista de la sesión 2 las igualdades que escribieron en las actividades 4 y 5.

c) Una pareja voluntaria escriba en el pizarrón todas las igualdades de la lista anterior.

d) Analicen las expresiones algebraicas que escribió la pareja voluntaria y, con ayuda del profesor, identifiquen cuáles son aditivas y cuáles multiplicativas.

Retomando una mirada previa

Recuerden la situación planteada en la sección *Una mirada previa* y respondan individualmente.

Autorregulación

1. Después de efectuar las actividades de las sesiones 1 a 3, ¿consideran que ahora es más fácil, igual o más difícil responder la actividad planteada en esa sección?

______

2. ¿Prefieren efectuar las actividades solos o con un compañero?

______

3. Escriban algún error que hayan cometido y cómo lo corrigieron. Si no tuvieron errores, escriban un conocimiento que adquirieron en esta secuencia.

______

* En sesión grupal, consideren los modelos geométricos usados en la secuencia para explicar qué es un segmento, el perímetro y el área.

En retrospectiva

En esta secuencia de tres sesiones se han estudiado, ente otros, los conceptos:

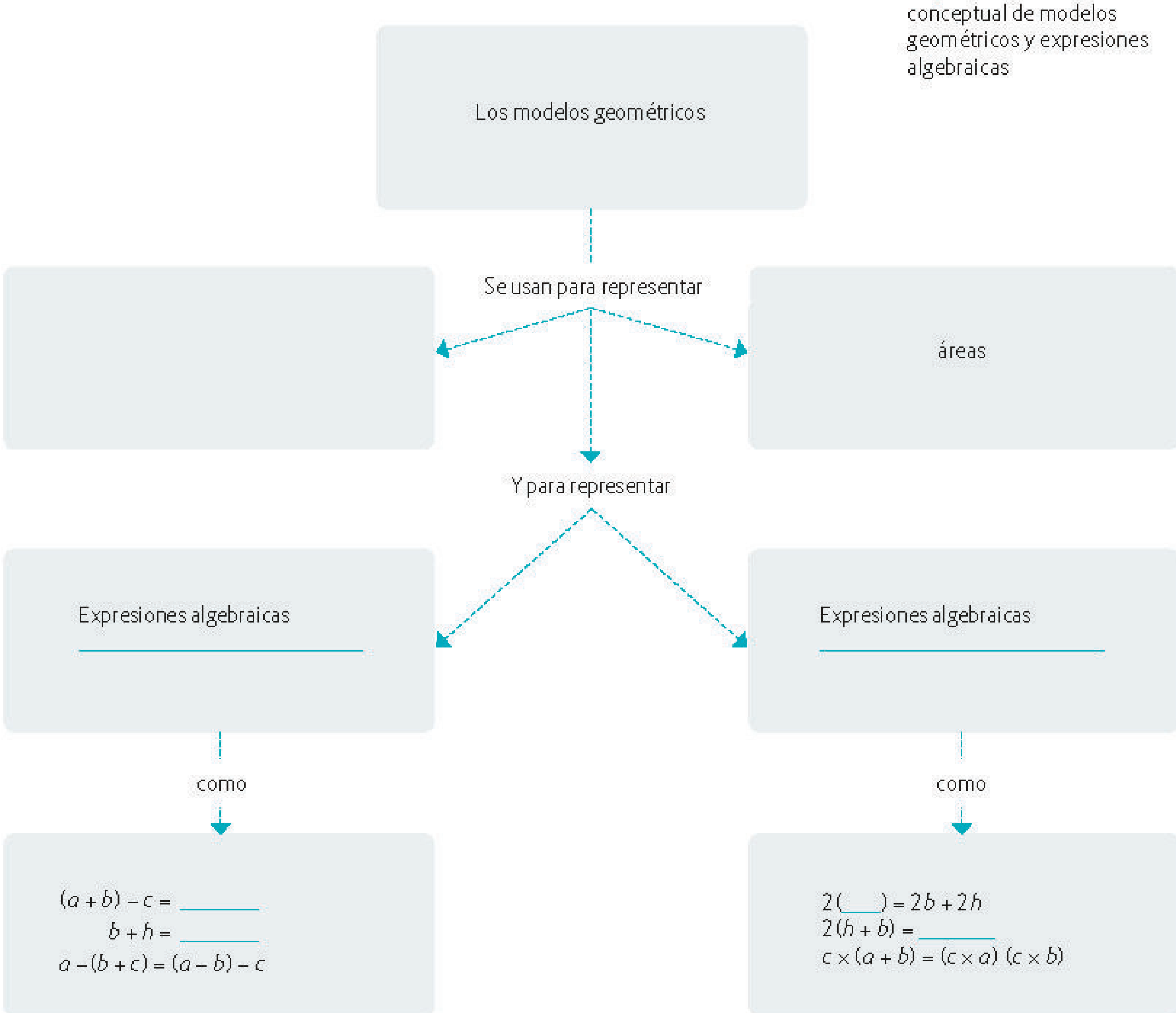
- Modelos geométricos
  - Para representar: sumas y restas de segmentos, cálculo de perímetros y áreas
- Expresiones algebraicas
  - Aditivas y multiplicativas

Las igualdades algebraicas representadas y analizadas fueron:

$$(a+b)-c=a+(b-c)$$
$$b+h=h+b$$
$$2(b+h)=2b+2h$$
$$2(h+b)=2h+2b$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c$$
$$c\times(a+b)=(c\times a)+(c\times b)$$

En el esquema 5.1 hay óvalos que deben llenarse. Coloca cada concepto de la lista en un óvalo de modo que el mapa conceptual sea coherente, es decir, que informe fidedignamente sobre las relaciones entre los conceptos.

Esquema 5.1 Mapa conceptual de modelos geométricos y expresiones algebraicas



¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente los problemas. Necesitarán regla y compás.

1. Consideren los segmentos b y c, representen gráficamente las operaciones indicadas y hagan lo que se indica.

a) $3b - 3c$ ____________________

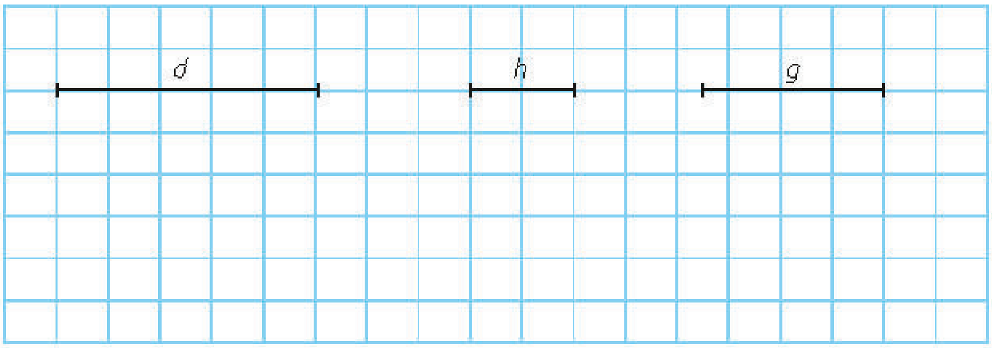
b) $3(b - c)$ ____________________

c) ¿Cómo son los segmentos que resultaron de las operaciones de los incisos anteriores? ____________________

d) Escriban la expresión algebraica que justifique su respuesta al inciso **c**.

____

2. Observen los segmentos trazados en la cuadrícula y hagan lo que se indica.



a) Tracen un rectángulo de base g y altura $d - h$.

b) A la derecha del rectángulo anterior, tracen dos rectángulos de base g, el primero de altura d y el segundo de altura h.

c) En el rectángulo de mayor área de los dos trazados en el inciso **b**, delimiten el área que corresponde a $gd - gh$.

d) ¿Cómo son las áreas de los rectángulos trazados en los incisos **a** y **c**?

____

e) Escriban una expresión algebraica que represente su respuesta al inciso **d**.

____

* Reúnanse en parejas. Comparen sus respuestas a los problemas. Cuando haya discrepancias, anoten los razonamientos y operaciones que los llevan a obtener sus respuestas.

Con otra pareja intenten resolver las dudas que les quedan y vuelvan a las respuestas que obtuvieron individualmente. Corrijan lo que estén seguros de que estaba incorrecto pero no borren sus primeras respuestas para que analicen dónde estuvo su error.

Los equipos que aún tienen dudas explíquenlas al grupo para que las resuelvan en conjunto.

BLOQUE 1

S6

Potencias con exponente entero

Reúnanse en parejas, analicen la situación y hagan lo que se pide.

1. En clases de Física se estudia la famosa fórmula matemática descubierta por Albert Einstein que relaciona la masa de un objeto con la energía, la fórmula es $E = mc^2$, donde E es la energía, m la masa y c la velocidad de la luz (recuerda que $c^2 = c \times c$).

   La velocidad de la luz es $c = 300\,000$ km/s. ¿Cuánta energía contiene el Sol? Como se conoce la velocidad de la luz, para aplicar la fórmula de Einstein bastaría saber la masa del Sol. Los científicos han estimado que la masa del Sol es aproximadamente $m = 2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg, (2 seguido de 30 ceros).

   A magnitudes tan grandes como la velocidad de la luz o la masa del Sol se les llama **cantidades astronómicas** porque surgen frecuentemente en la Astronomía.

   a) Calculen la energía del Sol.

   b) ¿Pueden hacer los cálculos con una calculadora? ¿Por qué?

   c) ¿Cómo pueden escribirse las cantidades astronómicas de forma concisa y hacerse los cálculos de manera simplificada?

* Si tienen dificultad para responder, después de estudiar la lección regresen a estas preguntas.

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

En otras palabras

Masa es una magnitud que expresa la cantidad de materia de un cuerpo.
La **energía** se define como la capacidad de realizar trabajo, de producir movimiento, de generar cambio.

Sesión 1. Potencias de un número y multiplicación de potencias

α

Trabajen en equipo. Analicen y resuelvan la situación.

1. Cuando un virus letal llega a una célula, ésta, después de media hora, propaga la enfermedad a otras dos; estas dos infectan en media hora a dos cada una y así sucesivamente.

   a) Una vez que el virus entra en una célula del cuerpo, ¿cuántas nuevas células se infectarán después de seis horas, sin tener en cuenta las infectadas antes? Hagan en su cuaderno una tabla para dar respuesta al problema. ______

   ______

   ______

   b) En total, ¿cuántas células se habrán infectado a las 6 horas? Expresen el resultado como suma de potencias. ______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, verifiquen por qué. Para ello, completen la tabla 6.1.

Tabla 6.1 Propagación de un virus en varias células infectadas

Tiempo en horas	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	6
Células nuevas que se infectan cada media hora	1	2											
Total de células infectadas	1	3											

Frecuentemente se requiere multiplicar por sí mismo un número varias veces, por esta razón se le da un nombre a dicha operación y se investigan sus propiedades. En la siguiente actividad tendrás la oportunidad de profundizar en esa idea

Problemas

En parejas, hagan lo que se pide.

2. Indiquen la operación o las operaciones que harían (pero sin realizarlas) para responder cada una de las preguntas.
   - Consideren un cuadrado cuyo lado mide 10 cm. ¿Cuál es su área? ___________.
   - Consideren un cubo cuya arista mide 9 cm. ¿Cuál es su volumen? ___________.
   - En una panadería hay ocho anaqueles; en cada anaquel se ponen ocho charolas y en cada charola, ocho panes. ¿Cuántos panes contienen los ocho anaqueles? ___________.

   a) ¿De qué otra forma se pueden expresar los productos repetidos? Para descubrirlo, relacionen con una línea la expresión de la derecha (llamada potencia) que es igual a cada producto repetido de la columna de la izquierda.

i) 5×5	3^5
ii) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$	5^2
iii) $5 \times 5 \times 5$	2^5
iv) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	5^2

   b) En cada una de las potencias digan cuál es la base y cuál es el exponente:

i) 10^3	ii) 4^2	iii) 5^4
base =	base =	base =
exponente =	exponente =	exponente =

   c) Escribe las potencias con el exponente y la base indicadas en cada caso.

i) Exponente 2 y base 10	ii) Exponente 4 y base 2	iii) Exponente 3 y base 5
potencia =	potencia =	potencia =

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Discutan cómo hacer una búsqueda por internet para responder las preguntas. Después hagan la consulta y verifiquen o rectifiquen sus respuestas.

Contextos en los que se usan potencias

En ciertas situaciones surge naturalmente la necesidad de usar potencias. Al resolver los siguientes problemas tendrán la oportunidad de utilizar la noción de potencia.

Problemas

Formen parejas y resuelvan los siguientes problemas:

3. ¿Cuál es el resultado de cada una de las siguientes potencias? Una vez que escriban sus respuestas, debajo de cada inciso escriban la expresión análoga a "81 es la cuarta potencia de 3, es decir, $3^4 = 81$".

   a) $5^2 =$ b) $7^3 =$ c) $9^4 =$ d) $3^5 =$

4. En los siguientes incisos se proponen productos de dos potencias con la misma base. Expresen el resultado como una potencia.

   i) $3^2 \times 3^3 =$ ii) $2^3 \times 2^4 =$ iii) $5^2 \times 5^4 =$ iv) $4^5 \times 4^3 =$

   ¿Notan alguna regularidad en el exponente de los resultados respecto a los exponentes de sus respectivos factores? Si la identifican, escriban dicha regularidad.

   ____

5. Pensando en la regularidad que notaron, escriban en el lugar en blanco una potencia para que la igualdad sea verdadera.

   i) $2^2 \times$ ______ $= 2^7$ iii) $7^2 \times$ ______ $= 7^5$

   ii) $8^3 \times$ ______ $= 8^7$ iv) $5^5 \times$ ______ $= 5^6$

6. A continuación se enuncian tres relaciones que involucran potencias con la misma base. Una es verdadera y las otras no. Señalen la verdadera. Justifiquen su respuesta.

   i) $b^n \times b^m = b^{nm}$ iii) $b^n \times b^m = b^{n+m}$

   ii) $b^n \times b^m = nm^b$ iv) $b^n \times b^m = b^{2nm}$

   ____

   ____

7. En cada fila hay tres incisos (en la primera fila son i, i', i''), determinen el resultado de las dos primeras operaciones de cada fila y deduzcan el resultado de la tercera operación.

   i) $3^2 \times 3^1 =$ i') $3^2 \times 3 =$ i'') $3^1 =$

   ii) $5^4 \times 5^1 =$ ii') $5^4 \times 5 =$ ii'') $5^1 =$

   iii) $8^3 \times 8^1 =$ iii') $8^3 \times 8 =$ iii'') $8^1 =$

   iv) $10^7 \times 10^1 =$ iv') $10^7 \times 10 =$ iv'') $10^1 =$

8. Si a es cualquier número, digan a qué es igual a^1, completen: $a^1 =$ ______________. Discutan su respuesta.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. En particular, discutan cómo las respuestas a los problemas 3 y 4 pueden servir de argumento para la respuesta del problema 6.

Potencias de fracciones

Conviene saber operar las potencias de fracciones, y aunque no son muy diferentes presentan rasgos propios que se deben conocer. Haciendo la siguiente actividad podrán ver tales rasgos propios de las potencias de fracciones.

Actividad

Formen parejas y resuelvan los siguientes problemas.

9. En cada inciso se presentan fracciones multiplicadas por sí mismas. Reduzcan cada expresión a una sola fracción.

i) $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=$

ii) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=$

iii) $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=$

iv) $\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}=$

10. En cada inciso se presenta la potencia de una fracción. Expresen la fracción resultante de manera que su denominador y numerador sean potencias.

i) $\left(\frac{3}{7}\right)^2=$ ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3=$ iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=$ iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=$

11. Pongan una **V** en la expresión que es verdadera y una **F** en la que son falsas. Propongan un ejemplo para apoyar su decisión.

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{n\times a}{n\times b}$

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{n^a}{n^b}$

iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{b^n}{a^n}$

12. En los siguientes incisos se proponen productos de dos potencias con la misma fracción como base. Expresen el resultado como potencia de una fracción.

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=$

ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3\times\left(\frac{3}{2}\right)^4=$

iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=$

iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=$

13. A continuación se enuncian cuatro expresiones que involucran potencias con la misma base. Una es verdadera y las otras no. Señalen la verdadera. Justifiquen su respuesta.

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{nm}$

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{a}{b}\right)^m=nm^b$

iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n\times\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^{2nm}$

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Expongan los ejemplos que les sirvieron para apoya su decisión en los problemas 9 y 11. Después en reunión grupal tendrán la oportunidad de contrastar sus respuestas y decidir si están en lo correcto.

Potencias de números decimales

La multiplicación de un número decimal por sí mismo también suele presentarse en situaciones de la vida diaria y científicas. Basta pensar en el área de un cuadrado o un cubo cuya longitud de un lado sea un número decimal. En la siguiente actividad verán algo sobre este tipo de potencias.

En otras palabras

Nos referimos a la "potencia 2", "potencia 3", "potencia 4", etc. de un número, al número elevado a la segunda, tercera, cuarta, etc. potencia.

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

14. Encuentren el resultado de cada una de las siguientes potencias.

i) $2.1^3 =$ ii) $3.4^2 =$ iii) $11.2^2 =$ iv) $0.1^4 =$

15. En cada inciso, expresen el producto de dos potencias indicado como una sola potencia sin desarrollarla.

i) $1.7^2 \times 1.7^3 =$ iii) $3.25^4 \times 3.25^3 =$

ii) $2.4^3 \times 2.4^7 =$ iv) $0.1^4 \times 0.1^5 =$

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumente su respuesta hasta llegar a una conclusión.

Potencias de potencias

Actividad

Formen parejas y resuelvan los siguientes problemas:

16. ¿Cómo se simplifica una potencia de una potencia? En los siguientes incisos utilicen la caracterización de potencia dos veces para determinar el resultado. Escriban éste en forma de potencia.

i) $(3^3)^2 =$ ii) $(5^2)^3 =$ iii) $(8^2)^6 =$ iv) $(10^4)^5 =$

a) ¿Notan aluna regularidad en el exponente del resultado en función de los exponentes de la potencia de potencia? Escriba lo que observan.

____

____

b) Una de las siguientes es la regla para simplificar la potencia de una potencia. Escribe **V** delante de la regla y **F** delante de las relaciones que no son correctas.

i) $(a^n)^m = a^{(n+m)}$ iii) $(a^n)^m = a(n^m)$

ii) $(a^n)^m = a^{nm}$ iv) Ninguna de las anteriores

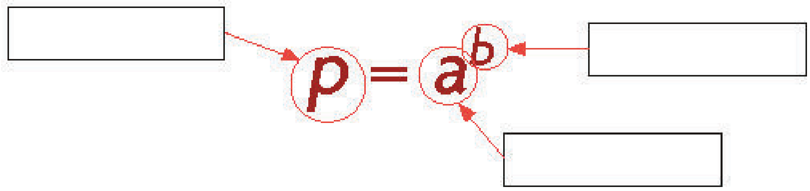
c) Desarrollen un ejemplo adicional para apoyar su elección en el inciso anterior y con un ejemplo muestren que las otras opciones son falsas.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumente su respuesta hasta llegar a una conclusión.

En resumen, la **potencia** es una operación matemática formada por dos elementos:

base y exponente; donde la base puede ser un número cualquiera (entero, fracción o número decimal) y el exponente un número natural (en la siguiente sesión se consideraran exponentes negativos).

17. En el siguiente esquema coloquen los términos: potencia, base y exponente en el lugar adecuado.



18. Completen las siguientes expresiones que representan dos reglas (que son parte de las llamadas **reglas o leyes de los exponentes**) que se construyeron en las actividades de esta sesión.

i) $a^n \times a^m =$ ________ ii) $(a^n)^m =$ ________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden argumenten sus propuestas con casos particulares hasta llegar a una conclusión.

Sesión 2. División de potencias de una misma base y potencias con exponente negativo

Formen parejas, lean y hagan lo que se pide.

1. Unas medidas conocidas del sistema métrico decimal menores que un metro son: decímetro, centímetro y milímetro. En algunos manuales (o en algunos artículos en internet) podrán ver que se refieren a los centímetros como 10^{-2} m.
   a) Analizando la manera de referirse a los centímetros, ¿qué entienden por una potencia con exponente negativo, por ejemplo: 10^{-2}? ____________.
   Noten entonces las siguientes tres formas de expresar un centímetro en unidades de metro; la última es con exponente negativo.
   0.01 m $\qquad \frac{1}{10^2}$ m $\qquad 10^{-2}$ m
   b) Escriban la tercera forma de escribir un milímetro de manera que tenga exponente negativo.
   0.001 m $\qquad \frac{1}{10^3}$ m $\qquad$ ________
   c) Escriban la tercera forma de escribir un decímetro de manera que tenga exponente negativo.
   0.1 m $\qquad \frac{1}{10^1}$ m $\qquad$ ________

* Reúnanse con otras parejas y comparen sus respuestas. Si no coinciden argumenten sus propuestas con casos particulares hasta llegar a una conclusión. Tengan presente su conclusión para que la confronten con lo que van a estudiar en esa sesión.

En la sesión anterior se introdujo el concepto de potencia y se encontró la propiedad de los exponentes de un producto de potencias. En esta sesión se hará lo propio con el cociente de potencias de una misma base. Para esto realicen la siguiente actividad.

2. En cada inciso se presentan divisiones de fracciones de la misma base; simplifiquen las fracciones hasta expresarlas como una fracción simple.

i) $\frac{3^5}{3^2} =$ ii) $\frac{8^7}{8^3} =$ iii) $\frac{10^7}{10^5} =$ iv) $\frac{3.2^6}{3.2^2} =$

a) ¿Notan alguna regularidad en el exponente de los resultados respecto a los exponentes de sus respectivos factores? Si la identifican, escríbanla.

b) Para determinar un criterio general sobre las anteriores operaciones entre potencias de una misma base, a continuación se enuncian tres relaciones, una es la **regla** (la relación verdadera) y las otras no. Señalen la verdadera. Justifiquen su respuesta.

i) $\frac{b^n}{b^m} = (b)^{nm}$ ii) $\frac{b^n}{b^m} = (b)^{2nm}$ iii) $\frac{b^n}{b^m} = b^{m-n}$ iv) $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

c) Apliquen la regla que determinaron en el anterior inciso para expresar los siguientes cocientes de potencias como una potencia y verifiquen los resultados con una calculadora.

i) $\frac{10^5}{10^2} =$ ii) $\frac{18^7}{18^3} =$ iii) $\frac{9^7}{9^5} =$ iv) $\frac{4.5^6}{4.5^2} =$

d) Apliquen la regla **para expresar el cociente de las siguientes divisiones como un exponente.**

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \div \left(\frac{3}{2}\right)^4 =$ iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

e) Apliquen la regla en los siguientes casos especiales en que los exponentes de ambas potencias coinciden.

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^5 =$ iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right)^4 =$

ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \div \left(\frac{3}{2}\right)^3 =$ iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^5 =$

f) Tomen en cuenta el problema anterior, para descubrir lo que significa a^0. En las siguientes expresiones indiquen con una **V** la igualdad que sea verdadera y con una **F**, la que no lo sea (Se asume que $a \neq 0$.)

i) $a^0 = 0$ iii) $a^0 = a$

ii) $a^0 = 1$ iv) Ninguna de las anteriores

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumente su respuesta hasta llegar a una conclusión.

Potencias con exponente negativo

Hasta ahora se han trabajado exponentes positivos o cero, pero ¿Tiene sentido pensar en exponentes negativos? Con la siguiente actividad podrán responder a la pregunta.

Problemas

Formen parejas y resuelvan los problemas.

3. En cada inciso se presentan divisiones de fracciones con la misma base; simplifíquen hasta expresarlas como una fracción simple.

i) $\frac{3^2}{3^3} =$ ii) $\frac{8^1}{8^3} =$

iii) $\frac{10^3}{10^6} =$ iv) $\frac{6.2^5}{6.2^9} =$

a) Apliquen a las anteriores divisiones la regla: $a^n \div a^m = a^{(n-m)}$ ¿Qué características tiene el exponente que resulta? Escriban sus observaciones.

b) Lo anterior puede llevar a definir una potencia de exponente negativo. Escriban en la parte derecha de cada igualdad, una expresión que ejemplifique la regla anterior.

i) $3^{-1} =$ ii) $8^{-2} =$

iii) $10^{-3} =$ iv) $6.2^{-4} =$

c) A continuación se presentan cuatro expresiones. Pongan una **V** en la definición apropiada para a^{-b} y una **F** en las expresiones que no pueden definirla de manera apropiada.

i) $a^{-b} = \frac{a}{-b}$ ii) $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ iii) $a^{-b} = \frac{1}{b^a}$ iv) $a^{-b} = \frac{a}{b}$

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumente su respuesta hasta llegar a una conclusión.

Problemas

Resuelvan individualmente.

4. Expresen el resultado como una fracción y como decimal redondeado a tres cifras.

i) $2^{-2} =$ ii) $7^{-3} =$

iii) $10^{-3} =$ iv) $3^{-5} =$

* Reúnanse con otro compañero y comparen sus respuestas.

5. Escriban en forma decimal las siguientes potencias de exponente negativo de 10.

i) 10^{-1} = ii) 10^{-2} = iii) 10^{-3} = iii) 10^{-4} =

Formen parejas y hagan lo que se pide.

ω

6. Completen las siguientes expresiones que representan dos reglas (que son parte de las llamadas reglas o leyes de los exponentes) que se construyeron en las actividades de esta sesión.

i) $\frac{a^n}{a^m}$ ii) a^0 = iii) a^{-b} =

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden argumenten sus propuestas con casos particulares hasta llegar a una conclusión

Sesión 3. Potencias de 10 y notación científica

Formen equipos y hagan lo que se pide.

α

1. La masa (m) del Sol es de 2 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg, es decir, $m = 2 \times$ 1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.
   a) Escriban la masa del Sol como el producto de 2 por una potencia de 10.
   b) ¿Qué relación hay entre el exponente y el número de ceros del número desarrollado?

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Argumenten cómo obtuvieron el exponente de la potencia que representa la masa del Sol. Lleguen a un acuerdo sobre la respuesta correcta y el argumento que la justifica.

Potencias de 10

σ

Actividad

Formen parejas y respondan.

2. ¿Qué es una potencia de 10?

3. Escriban las primeras cinco potencias de 10 con exponente positivo.

4. Escriban las primeras cinco potencias de 10 con exponente negativo.

5. Desarrollen las siguientes potencias.

   a) $10^2 =$ c) $10^4 =$

   b) $10^3 =$ d) $10^5 =$

   ¿Notan alguna regularidad en los ceros del resultado respecto al exponente? Escriban cuál es.

6. Si un número tiene en su desarrollo varios ceros a la derecha, entonces, ¿se puede expresar como el producto de un número por una potencia de 10? Expliquen.

7. Para multiplicar una constante por una potencia primera se desarrolla la potencia, como si esta estuviera en un paréntesis, y después se multiplica la constante por el resultado de desarrollar la potencia.

   a) Encuentren el resultado de las siguientes multiplicaciones.

      i) $5.2 \times 10^2 =$ ii) $3.25 \times 10^3 =$

      iii) $4.235 \times 10^4 =$ iv) $1.201 \times 10^6 =$

   b) Describan cómo son los números resultantes en términos del exponente y de la posición del punto decimal del resultado respecto al punto decimal del factor original (incluyendo los ceros que se aumentan).

8. Los números enteros que tienen varios ceros a la derecha se pueden expresar como el producto de un número decimal por una potencia de 10, por ejemplo, el número 12 100 se puede representar así: $12\,100 = 1.2 \times 10^4$. Observen la relación entre el exponente 4 y la posición del punto decimal en el número que multiplica a la potencia y escríbanlos como el producto de un decimal por una potencia de 10.

   a) 340 000 =

   b) 153 000 000 000 =

   c) 18 000 000 =

   d) 2 431 000 000 000 000 =

* Reúnanse con otro equipo y verifiquen el procedimiento que siguen para expresar un número grande como el producto de un número decimal con una potencia de 10.

Notación científica de números muy pequeños

El mismo tipo de expresiones que se emplearon con cantidades grandes se pueden emplear con cantidades pequeñas, como se verá en seguida.

Actividad

9. Escriban en forma decimal las siguientes potencias negativas de 10.
   i) $10^{-1} =$
   ii) $10^{-2} =$
   iii) $10^{-3} =$
   iv) $10^{-4} =$

   a) Escriban en forma decimal los siguientes números que están dados en notación científica.

      i) $3.2 \times 10^{-1} =$
      iii) $3.167 \times 10^{-3} =$
      ii) $1.21 \times 10^{-2} =$
      iv) $2.1 \times 10^{-4} =$

   b) Escriban en notación científica los siguientes números. .

      i) $0.003 =$
      ii) $0.00017 =$
      iii) $0.0000111 =$
      iv) $0.0000004321 =$

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas, si no coinciden revisen y argumenten sus respuestas hasta llegar a un acuerdo.

En resumen: Un número positivo se escribe en notación científica cuando se expresa en la forma $a \times 10^n$, donde el coeficiente a es tal que $1 \leq a < 10$, y n es un entero.

   a) ¿Qué signo tiene el exponente de la potencia de 10 de la notación científica cuando el número es mayor que 100?
   b) ¿Qué signo tiene el exponente de la potencia de 10 de la notación científica cuando el número es menor que 1?

Retomando una mirada previa

1. Recuerden el problema de la sección *Una mirada previa* sobre calcular la energía del Sol con base en la fórmula de Einstein: $E = mc^2$.

   a) Expresen con notación científica la velocidad de la luz:
      $c = 300000$ km/s = ____________________

   b) Expresen con notación científica el cuadrado de la velocidad de la luz: $c^2 =$ ____________________

   c) Expresen con notación científica la masa del Sol.
      $m = 2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg = ____________________

   d) Efectúen el producto mc^2 utilizando notación científica. ____________________

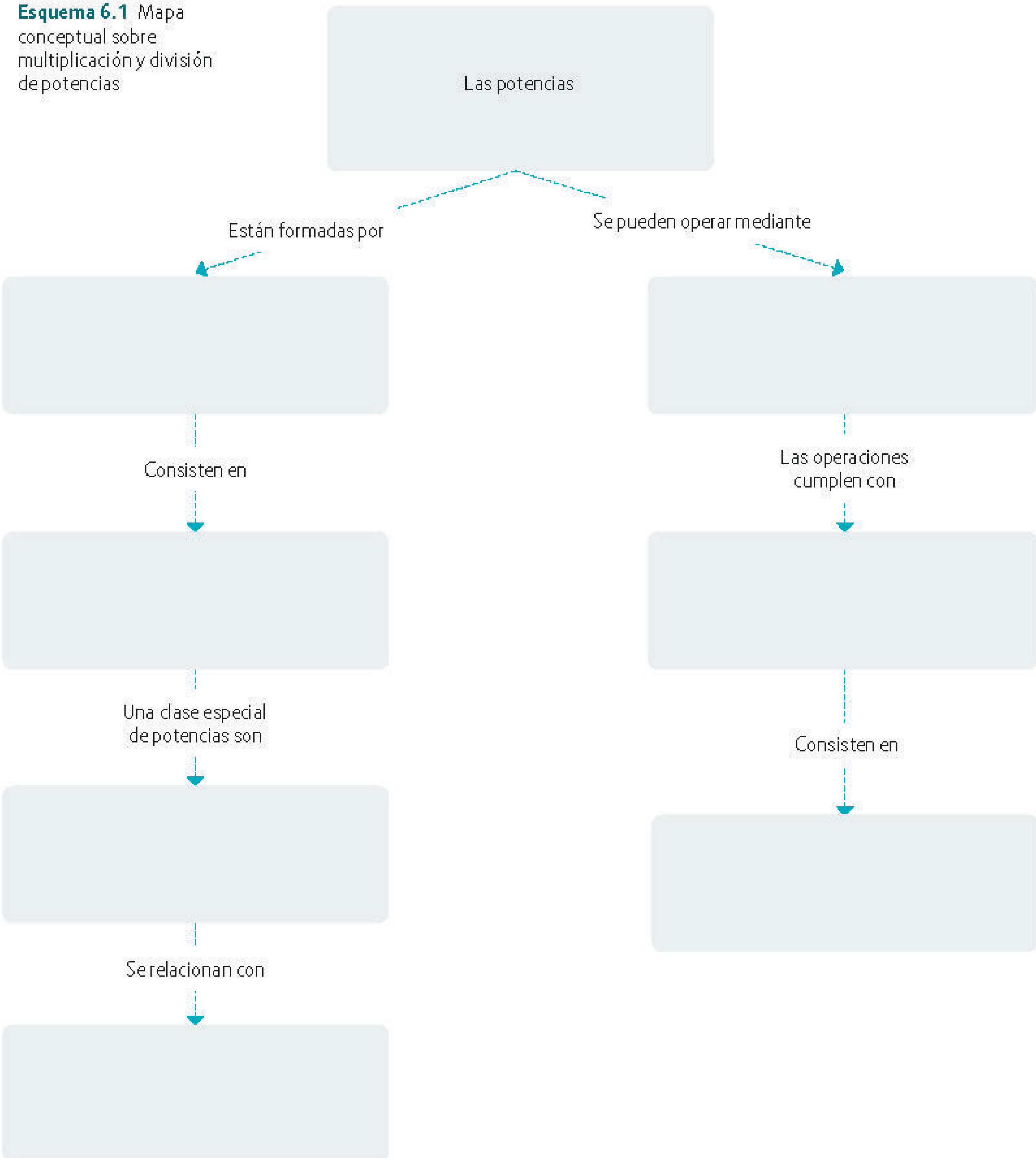
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. ¿Llegaron a la respuesta que la energía del Sol es 1.8×10^{41}? Comenten la utilidad de la notación científica para hacer cálculos astronómicos.

En retrospectiva

Formen parejas. Coloquen cada uno de los siguientes enunciados en un recuadro del mapa conceptual de manera que tenga sentido.

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$ y $b^n \div b^m = b^{n-m}$
- Base y exponente
- Leyes de los exponentes
- Multiplicación o división
- Multiplicar tantas veces la base como indica el exponente
- Notación científica
- Potencias de 10

Esquema 6.1 Mapa conceptual sobre multiplicación y división de potencias



¿Qué aprendí?

1. Escriban el valor numérico de las potencias.
   a) $2^{-2} =$
   b) $2^{-1} =$
   c) $2^{0} =$
   d) $2^{1} =$
   e) $5^{-2} =$
   f) $5^{-1} =$
   g) $5^{0} =$
   h) $5^{1} =$

2. Expresen como una potencia el resultado de los productos.
   a) $6^{2} \times 6^{3} =$
   b) $8^{-5} \times 8^{1} =$
   c) $5^{2} \times 5^{4} =$
   d) $9^{-4} \times 9^{-5} =$

3. Expresen los cocientes en forma de potencia.
   a) $7^{4} \div 7^{2} =$
   b) $9^{7} \div 9^{3} =$
   c) $10^{11} \div 10^{10} =$
   d) $11^{-9} \div 11^{2} =$

4. Enuncien las leyes de los exponentes para la multiplicación y división de potencias. ______________________________

5. Una persona reparte 3 cartas entre 3 personas. La carta es tal que convence a cada una de las tres personas que la recibieron a reproducir 3 cartas y repartirla entre tres personas cada una, de manera que en la segunda ocasión se reparten 9 cartas. Estas a su vez reproducen y reparten tres cartas cada una. Este proceso se repite 20 veces. ¿Cuántas personas reciben una carta en la ocasión número 20? Hagan una tabla en la que la ocasión 1 es cuando se reparten las tres primeras cartas. Expresa el resultado en forma de potencia. ______________________________

6. Si la Luz da aproximadamente 7.5 vueltas alrededor de la Tierra en un segundo, ¿cuál es aproximadamente la longitud de la circunferencia de nuestro planeta? Expresen el resultado en notación científica. ______________________________

7. La Vía Láctea tiene diámetro promedio de 100 000 años luz. Si un año luz equivale a 9.46×10^{12} km, expresen ese diámetro en kilómetros y en notación científica. ______________________________

8. La masa de la semilla más pequeña del mundo es de 35 millonésimas de gramo y pertenece a las orquídeas epífitas. Expresen esa cantidad en notación científica.

____

BLOQUE 1

S7 Raíz cuadrada

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

Formen parejas y resuelvan el siguiente problema.

1. Con un pedazo de lona rectangular de 3 m de ancho y 12 m de largo se quiere hacer un anuncio espectacular de forma cuadrada, como se muestra en la figura 7.1.

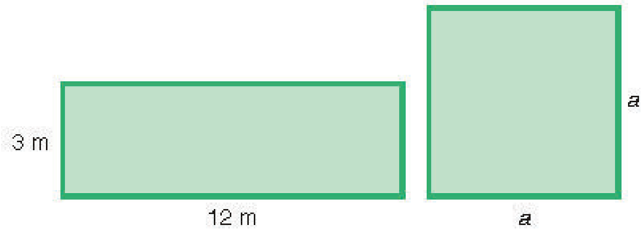


Figura 7.1 Rectángulo a transformar en cuadrado

   a) De acuerdo con los datos de las figuras, ¿cuál es el área del rectángulo?

   ____

   b) Si se utiliza toda la tela, sin desperdiciar nada, ¿cuáles son las medidas del cuadrado que se hará? _______________

   c) ¿De qué medida tendría que ser el lado del cuadrado? _______________

En otras palabras

Cuadrar una superficie significa encontrar un cuadrado con la misma área que la superficie dada. Para ello es necesario encontrar la magnitud del lado de un cuadrado con la misma área que la superficie que se desea cuadrar.

2. Encuentren una solución empírica del problema trazando, por ejemplo, un dibujo a escala del rectángulo que se proporciona, para después recortarlo en piezas y pegarlas para formar con ellas un cuadrado (**cuadrar**), de tal manera que se pueda hallar una solución al problema.
   a) Dibujen en su cuaderno el rectángulo cortado en piezas.
   b) Indiquen cuáles son las dimensiones del cuadrado que construyeron con las piezas del rectángulo.

Sesión 1. Cuadrar una superficie y su relación con la raíz cuadrada

Problemas

Con el siguiente problema encontrarán cuál es la relación entre cuadrar una superficie y la raíz cuadrada. Trabajen en parejas para llevar a cabo lo que se solicita.

1. En la figura 7.2 de la página 75 se tiene una superficie que mide 16 cuadritos. Para cuadrarla es necesario obtener un número tal que, multiplicado por sí mismo, dé 16.

   a) ¿Cuál es ese número? _______________

b) Observen la figura 7.2. En el cuadrado que ahí aparece, ¿qué significa el número encontrado?

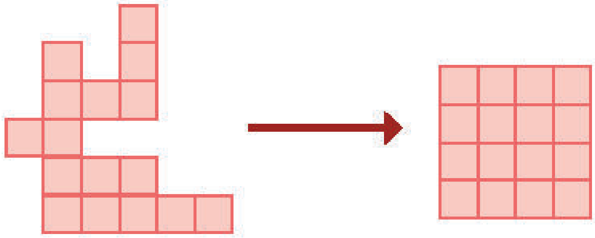
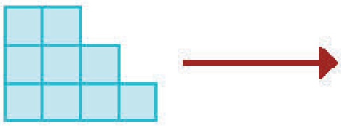


Figura 7.2 Cuadrado obtenido a partir de una figura irregular

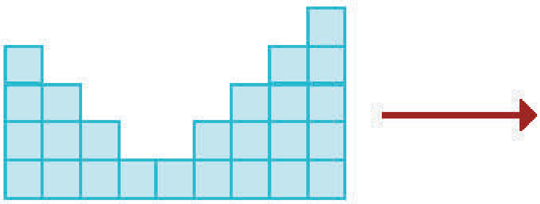
c) Cuadren las superficies dadas.

i)



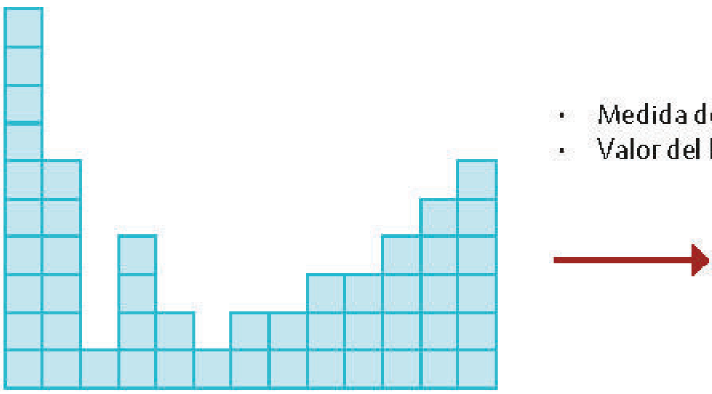
- Medida de la superficie: ____________
- Valor del lado del cuadrado construido: ________

ii)



- Medida de la superficie: ____________
- Valor del lado del cuadrado construido: ________

iii)



- Medida de la superficie: ____________
- Valor del lado del cuadrado construido: ________

d) Completen la tabla 7.1 con los valores encontrados en el inciso c.

Tabla 7.1 Valores de la medida de la superficie y del lado del cuadrado construido

Valores \ Casos	Figura 7.2	(i)	(ii)	(iii)
Medida de la superficie	16			
Valor del lado del cuadrado construido	4			

e) ¿Cuál es la relación hay entre la medida de la superficie con el valor del lado del cuadrado construido? ¿Esta relación se puede expresar por medio de una igualdad? Escriban sus resultados en su cuaderno, y preséntenlos en una sesión de trabajo colectivo durante la clase.

2. Analicen cada caso y respondan lo que se solicita.

   a) Seleccionen la opción que complete el enunciado.
   La raíz cuadrada de 4 es...

   - el mismo número 4.
   - un número distinto de 4 que al elevarlo al cuadrado da como resultado 4.
   - ninguna de las anteriores.

   b) Consideren cualquier número entero d elevado al cuadrado. Describan cuál es la raíz cuadrada de d. ______

En otras palabras

En general, al valor del lado de un cuadrado construido a partir de la medida de una superficie dada se le llama raíz del cuadrado o raíz cuadrada.

Una raíz cuadrada de un número dado es otro número que tiene la propiedad de que al elevarlo al cuadrado da como resultado el valor numérico dado.

Simbólicamente, si c es el número dado, a la raíz cuadrada de c se le denota con el símbolo $\sqrt{c}$, y ambos números satisfacen la igualdad $(\sqrt{c})^2 = c$.

3. Averigüen cómo se eleva al cuadrado y cómo se calcula la raíz cuadrada de un número con una calculadora científica. Después, completen la tabla 7.2; hagan las operaciones con la calculadora. Elijan el símbolo "=" si el resultado es exacto y "≅" (aproximadamente igual) si en la pantalla aparece un número indefinido de decimales.

Tabla 7.2 Resultados de calcular la raíz cuadrada usando calculadora

$\sqrt{c}$	=	≅
$\sqrt{100}$		
$\sqrt{200}$		
$\sqrt{320}$		
$\sqrt{2500}$		

Un **número cuadrado perfecto** es un número tal que, al extraerle raíz cuadrada, da como resultado un número entero.

4. Analicen los datos de la tabla 7.2.

   a) ¿Cuáles números son cuadrados perfectos? ______

   b) Elaboren una lista de 10 números que sean cuadrados perfectos. Justifiquen.
   ______
   ______

5. Lean la situación y contesten las preguntas.

Plan de Luis y Amelia para obtener números cuadrados perfectos

Mientras trabajaban en el salón de clase, todos los estudiantes escucharon que en el equipo de Luis y Amelia comentaron que podrían obtener tantos números cuadrados perfectos como quisieran si elevaban al cuadrado los números enteros, pero tenían que justificar que los números encontrados fueran, efectivamente, cuadrados perfectos.

   a) ¿Cuáles fueron los 20 cuadrados perfectos que encontraron siguiendo el plan de Luis y Amelia? ______

b) ¿Cuál sería un argumento para justificar que los números obtenidos mediante el plan de Luis y Amelia son, en efecto, cuadrados perfectos?

____

____

Sesión 2. Cálculo de la raíz cuadrada de manera aproximada

Actividad

En parejas, hagan lo que se solicita.

1. ¿Cómo pueden aproximar la raíz cuadrada de 149? Para hacerlo resuelvan los problemas.
   a) Primera etapa. Encontrar la parte entera.
      i) Encuentren el mayor número cuadrado menor que 149. ______________
      ii) Encuentren el menor número cuadrado mayor a 149. ______________
      iii) Escriban los números que encontraron en la siguiente expresión (se llama desigualdad), de manera que lo que dice el esquema sea verdadero:

      $\boxed{}$ es menor que $\boxed{149}$ es menor que $\boxed{}$

      iv) Si a cada número del esquema anterior se le saca raíz cuadrada, se obtiene una desigualdad como la siguiente; escriban en los recuadros de los extremos el valor correspondiente:

      $\boxed{}$ es menor que $\boxed{\sqrt{149}}$ es menor que $\boxed{}$

      Aunque no se sabe la raíz del número que está en medio, las raíces de los extremos sí se pueden obtener. ¿Cómo se interpreta esto? ______________.
      v) Escriban la cifra de los enteros de $\sqrt{149}$. ______________

   b) Segunda etapa. Encontrar la raíz con un decimal (se puede usar calculadora).
      i) Encuentren el mayor número cuadrado de un número con un decimal que sea menor que 149. (¿Qué número es la parte entera del "número con un decimal"?) ______________
      ii) Encuentren el menor número cuadrado de un número con un decimal que sea mayor que 149.
      iii) Escriban en los recuadros los números que obtuvieron de manera que sea verdadero lo que dice el esquema:

      $\boxed{}$ es menor que $\boxed{149}$ es menor que $\boxed{}$

      iv) Si a cada número del esquema se le saca raíz cuadrada, se produce un esquema como el siguiente; escriban en los recuadros de los extremos el valor correspondiente:

      $\boxed{}$ es menor que $\boxed{\sqrt{149}}$ es menor que $\boxed{}$

Aunque no se sabe la raíz del número que está en medio, las raíces de los extremos sí se pueden obtener. ¿Cómo se interpreta esto? ______________.

v) Escriban la cifra de los enteros y el primer decimal de $\sqrt{149}$. ____________

c) TERCERA ETAPA. ENCONTRAR LA RAÍZ CON DOS DECIMALES (SE PUEDE USAR CALCULADORA).

i) Encuentren el mayor número cuadrado de un número con dos decimales que sea menor que 149. (¿Qué número es la parte entera con un decimal del "número con dos decimales"?)

ii) Encuentren el menor número cuadrado de un número con dos decimales que sea mayor que 149.

iii) Escriban en los recuadros los números que obtuvieron de manera que sea verdadero lo que dice el esquema.

$\square$ es menor que $\boxed{149}$ es menor que $\square$

iv) Si a cada número del esquema se saca la raíz cuadrada, se produce un esquema como el siguiente; escriban en los recuadros de los extremos el valor correspondiente:

$\square$ es menor que $\boxed{\sqrt{149}}$ es menor que $\square$

Aunque no se sabe la raíz del número que está en medio, las raíces de los extremos sí se pueden obtener. ¿Cómo se interpreta esto? ____________.

i) Escriban la cifra de los enteros y los dos primeros decimales de $\sqrt{149}$.

____

b) En caso de que se quiera obtener la raíz con más número de decimales, se repite otra etapa, ahora buscando números cuadrados de números con tres decimales.

* Reúnanse con otro equipo y compren sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten sus respuestas hasta llegar a un acuerdo. Den otro número cualquiera de tres cifras y aproximen su raíz cuadrada con dos decimales; lleguen a un acuerdo de cómo realizar cada etapa para obtener un nuevo decimal.

2. Utilicen una calculadora sencilla. Con las operaciones aritméticas básicas, calculen de manera aproximada las siguientes raíces cuadradas.

a) $\sqrt{75}$ = b) $\sqrt{84}$ = c) $\sqrt{69}$ = d) $\sqrt{106}$ = e) $\sqrt{15}$ =

Cálculo aproximado de la raíz cuadrada utilizando el "método babilónico"

Continúen trabajando en parejas para saber en qué consiste el método babilónico de resolución aproximada de la raíz cuadrada.

3. ¿Saben que los babilonios idearon un procedimiento geométrico para resolver de manera aproximada problemas como el planteado al inicio de la esta secuencia 7?

El problema que abordaron los babilonios es el siguiente: "Dadas las dimensiones o superficie total de un rectángulo cualquiera hay que encontrar un cuadrado con la misma área".

El procedimiento que idearon juega con el **promedio de las dimensiones de un rectángulo dado** y con la **resolución de ecuaciones simples**, para avanzar en la construcción de **soluciones aproximadas**.

4. Para que redescubran el método babilónico obteniendo la $\sqrt{120}$, respondan las preguntas y resuelvan los problemas que se proponen.
   a) ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado sea $\sqrt{120}$ u? (Donde u representa cualquier unidad de medida de longitud.) ______________________________

   ____
   b) Propongan las dimensiones de un rectángulo cuya área sea 120 u^2. Para representarlo, hagan un dibujo en su cuaderno.
   c) ¿Están de acuerdo en que es posible formar un rectángulo que tenga un área de 120 u^2 y cuyos lados sean menores que el largo y mayores que el ancho del rectángulo que propusieron en el inciso anterior? Nota: Los lados de este nuevo rectángulo no son necesariamente enteros. ¿Cómo se pueden encontrar los lados del nuevo rectángulo a partir de los anteriores? Propongan diversas posibilidades. ______________________________

   ____
   d) Si han hallado un método eficiente para encontrar las dimensiones de este nuevo rectángulo de área 120 u^2, entonces han reinventado el método babilónico, pues lo que tienen que hacer es repetir el procedimiento con el rectángulo obtenido y encontraran otro cuyas dimensiones son más próximas al del cuadrado de área $\sqrt{120}$.
   a) Repitan el procedimiento para obtener una aproximación de dos decimales a $\sqrt{120}$.

* Reúnanse con otros equipo y comparen sus respuestas, ¿son aproximadas? Si no son iguales, revisen sus procedimientos y vean que quizá la diferencia proviene de las dimensiones del rectángulo original propuesto.

5. Para fortalecer las ideas del método babilónico, calculen ahora la $\sqrt{150}$. Para responder la pregunta del inciso c del problema anterior, consistente en encontrar los lados del rectángulo de área 150 u^2 cuyos lados sean menores al largo y mayores al ancho de un rectángulo dado, prueben con el promedio de los lados del rectángulo original. Con base en que el promedio es un lado y sabiendo que el nuevo rectángulo también debe tener 150 u^2 de área, pueden encontrar las dimensiones del otro lado.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

6. Realicen las operaciones y comparen los resultados.

i) $2 \times 2 =$	ii) $(-5) \times (-5) =$	iii) $7 \times 7 =$
$(-2)(-2) =$	$5 \times 5 =$	$(-7)(-7) =$

   a) Si la raíz cuadrada de un número es tal que elevada al cuadrado da ese número, ¿cuántas raíces cuadradas tiene un número? Argumenten su respuesta.
   b) Digan cuáles son las raíces cuadradas de los números.

i) 4	ii) 25	iii) 49

   c) Como cada número tiene dos raíces cuadradas, se distinguen colocando un signo a la raíz negativa; así: $\sqrt{4} = 2$ y $-\sqrt{4} = -2$. Escriban así las raíces de 25 y 49.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo.

Retomando una mirada previa

1. Trabajen con la misma pareja con la que trabajaron en la primera actividad de esta secuencia. Recuerden la situación planteada en la sección *Una mirada previa* sobre el área de un pedazo de lona.

   a) ¿Es posible utilizar alguno de los métodos vistos en la sesión para resolver el problema? Si su respuesta es positiva, háganlo; si es negativa, vean la respuesta de otros equipos. ______________________________

   ____

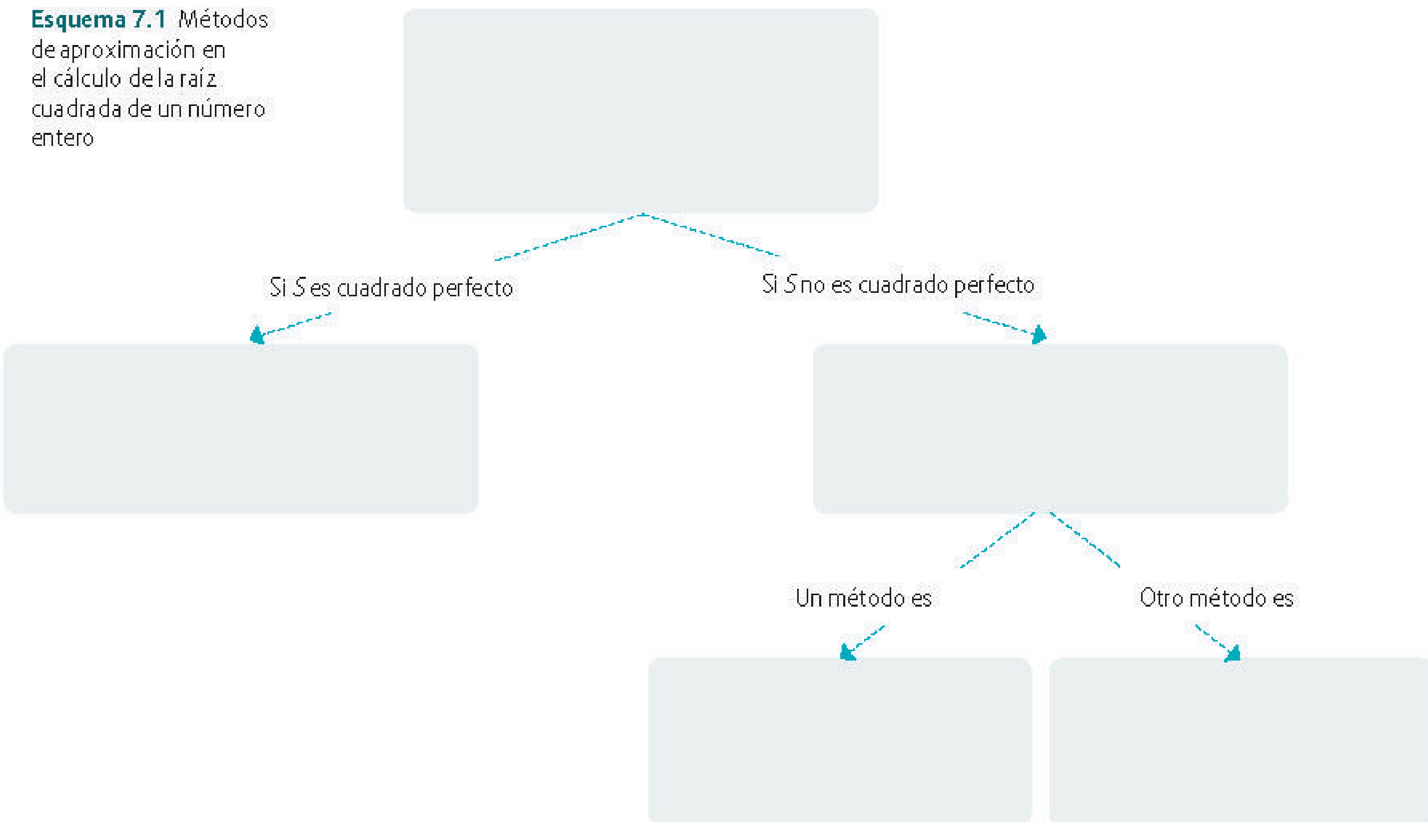
   b) Expliquen al resto del grupo su respuesta al inciso anterior. En el caso de divergencia de opiniones con otros compañeros, escuchen las razones que dan y, finalmente, traten de llegar a un acuerdo sobre cuál es la mejor respuesta.

En retrospectiva

Trabajen en parejas. Coloquen cada uno de los enunciados en un rectángulo de manera que el mapa conceptual tenga sentido.

- El método babilónico.
- Encontrar sucesivamente dos números decimales cada vez más próximos a la raíz, uno menor y otro mayor.
- La raíz cuadrada de *S*.
- Se calcula directamente.
- Se calcula mediante un método aproximado.

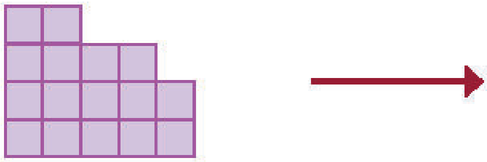
Esquema 7.1 Métodos de aproximación en el cálculo de la raíz cuadrada de un número entero

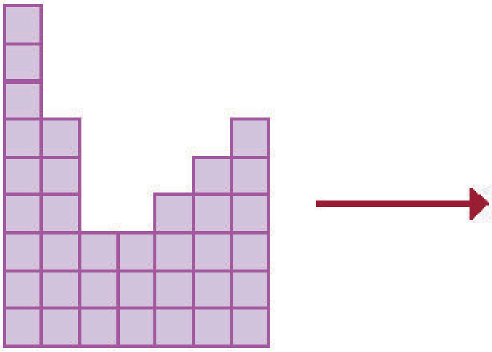


¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente los problemas que se presentan a continuación.

1. Cuadra las superficies dadas.

a) 

b) 

2. Al cuadrar una superficie de magnitud dada, ¿cuál es la relación que existe entre el valor del lado del cuadrado construido y la raíz cuadrada del número dado?

a) No hay ninguna relación entre ellos.

b) Hay una relación de identidad o igualdad.

c) Son números distintos.

3. ¿Cuándo se calcula de manera aproximada la raíz cuadrada de un número entero *s*?

a) Cuando el número *s* es un cuadrado perfecto.

b) Cuando *s* es un número negativo.

c) Cuando *s* no es un cuadrado perfecto.

4. Calculen las raíces cuadradas.

a) $\sqrt{17}$ = ______________________

b) $\sqrt{49}$ = ______________________

c) $\sqrt{33}$ = ______________________

d) $\sqrt{2}$ = ______________________

e) $\sqrt{100}$ = ______________________

* Reúnanse en parejas para comparar sus respuestas y los procedimientos que llevaron a cabo para resolver los problemas. Si hay discrepancias, intenten encontrar dónde está el error. Si aún persiste la duda, reúnanse con otra pareja para dilucidar cuál es la respuesta correcta. En caso de que persista alguna duda, compártanla con su profesor(a) para que los oriente.

BLOQUE 1

S8 Histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de series de tiempo

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Formen equipos de cuatro integrantes y hagan lo que se pide.

1. Una encuesta sobre el tiempo que la gente dedica a ver televisión consiste en preguntar "En promedio, ¿cuánto tiempo dedicas al día en ver la TV?". Como el tiempo que la gente gasta viendo TV probablemente es variable para cada día, sólo se puede responder con una estimación del promedio. Para facilitar la respuesta y el manejo de datos, en lugar de pedir a los encuestados que respondan con un tiempo preciso, se puede pedir que elijan un intervalo en el que estimen el tiempo promedio que dedican a esa actividad. Por ejemplo, "¿cuánto tiempo dedicas al día en ver la TV? Elige el intervalo en el que esté tu estimación del tiempo promedio que le dedicas por día" (tabla 8.1).

Tabla 8.1 Intervalo de tiempo que dedica una persona a ver TV

De 0 a 1 h	De 1 a 2 h	De 2 a 3 h	De 3 a 4 h	De 4 a 5 h
De 5 a 6 h	De 6 a 7 h	De 7 a 8 h	Más de 8 h	

a) Con base en lo anterior, diseñen una investigación para obtener datos (al menos 50) sobre el tiempo promedio por día que los alumnos de su escuela dedican a ver TV.
b) Organicen los datos en una gráfica.
c) Hagan un informe en el que destaquen alguno o algunos aspectos importantes de los datos que obtuvieron.
d) Expongan su informe en reunión grupal, discutan y comenten los resultados.

Sesión 1. Datos y el ciclo investigativo

α

En muchos tipos de investigación es necesario recoger datos sobre el asunto que se investiga. Los datos pueden ser nombres o números; si son números, algunas veces son enteros, y en otras, decimales o fracciones. Conviene también establecer de antemano el rango, intervalo o conjunto en el que se espera que estén los datos. En la siguiente actividad tendrán la posibilidad de pensar en los datos que se pueden obtener en diferentes proyectos.

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. A continuación se enlistan algunos proyectos de investigación cuya realización implica obtener datos. Imaginen que realizan el experimento y analicen el tipo de datos que obtendrían.

a) Escriban si los datos son números o nombres; si son números, ¿son enteros, decimales o fracciones? ¿Cuál es un conjunto posible para cada tipo de datos?

Proyectos:

- Los cantantes favoritos de los alumnos de la escuela. ______________
- La altura de los alumnos de una escuela. ______________
- Edad de los alumnos de la escuela. ______________
- Longitud de los perros mascotas que tienen los alumnos del salón. ______________
- Tiempo de ejecución de un problema de la clase de matemáticas hasta resolverlo o dejarlo por cansancio. ______________
- Tasa de natalidad de algunos países; pueden consultar la siguiente página web: https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2054rank.html ______________

b) Reúnanse con otra pareja y diseñen en su cuaderno un proyecto de investigación en el que obtengan datos. Escriban qué tipo de datos obtendrían.

c) Recojan los datos previstos en el proyecto, organícenlos y preséntenlos en una gráfica.

d) Escriban los aspectos destacables que vean en los datos en general y los revelados en la gráfica.

e) Hagan un informe para presentar al grupo en una sesión. El informe debe indicar el problema de investigación, cómo se recogieron y analizaron los datos y las conclusiones principales.

f) Preparen una presentación con base en su informe y expónganla en una reunión grupal. El profesor organizará el orden de exposición de los equipos.

En otras palabras

Tasa de natalidad es una medida para cuantificar la fecundidad. Consiste en la razón entre el número de recién nacidos vivos en una población durante un año específico y la población total a mitad de año, para el mismo año, usualmente multiplicada por 1 000. Por ejemplo, en 2017, México tiene la tasa de $T_M = 18.3$, esto quiere decir que en ese año el número de nacimientos N_{2017} entre la población P_{2017} a medio año multiplicado por 1 000 es igual a 18.3; esto es, $T_M = \frac{N_{2017}}{P_{2017}} \times 1000 = 18.3$. Como en 2017, México tenía aproximadamente 123.5 millones de habitantes, entonces habría aproximadamente 2 260 050 nacimientos (el INEGI informa que hubo 2 586 287 nacimientos; la diferencia se debe a que el número de habitantes de 123.5 millones es una cifra redondeada).

Datos de otras fuentes (uso de tecnología)

En una investigación se pueden utilizar datos recogidos por otras personas, equipos u organismos, y usarlos para responder una pregunta.

Actividad

Formen equipos y hagan lo que se pide.

2. Busquen en internet “Datos sobre el clima”, (por ejemplo, pueden hacer una búsqueda con la frase “normales climatológicas”), “Datos de salud”, “Datos de deportes”, etcétera.

   a) Identifiquen qué tipo de datos que se presentan en tablas y en gráficas, o ambas.

   b) Escriban en su cuaderno el conocimiento que adquirieron con la investigación.

   c) Reúnanse con otro equipo y expongan mutuamente la información que encontraron. Comenten sobre las ventajas y desventajas de las representaciones de los datos en tablas y en gráficas, en particular, de los histogramas (si éstos aparecieron).

El ciclo investigativo

Una investigación empírica responde a la necesidad de conocer algo que se ignora. Dicha necesidad se debe traducir en una pregunta de investigación, cuya respuesta ayude a avanzar en el conocimiento de eso que se ignora o permita conocerlo plenamente. Una vez formulada la pregunta, se diseña una observación, experimento o encuesta para obtener datos sobre el tema. Los datos obtenidos deben ser resumidos, organizados y analizados.

Las **tablas y gráficas** son instrumentos para organizar los datos y en esta forma permiten el análisis. Después, se obtienen resultados y conclusiones del análisis y como fase final se redacta el informe de la investigación. Frecuentemente, los resultados y conclusiones dan lugar a nuevas preguntas sobre el tema, lo que lleva a profundizar en la investigación o a una nueva investigación. En la siguiente actividad practicarán lo anterior.

En otras palabras

Una investigación empírica es una investigación fundada en la experimentación u observación. La palabra empírica significa que la información es obtenida mediante experiencia directa (observación y/o experimentación) y no sólo mediante documentos o mediante reflexión.

Actividad

Formen equipos de cuatro integrantes, lean con detenimiento la información anterior y hagan lo que se pide.

3. Las siguientes frases están organizadas en orden alfabético: carencia de conocimiento, diseño para obtener datos, escritura del informe de investigación, obtención de datos, pregunta de investigación, presentación de datos, reducción de datos, resultados y formulación de conclusiones; escríbanlas en el orden que ocupan en una investigación.

1. ____________________
2. ____________________
3. ____________________
4. ____________________
5. ____________________
6. ____________________
7. ____________________
8. ____________________

a) ¿Cómo se pueden obtener los datos en una investigación? Escriban tres ejemplos. ____________________

b) Mencionen dos instrumentos para organizar los datos. ____________________

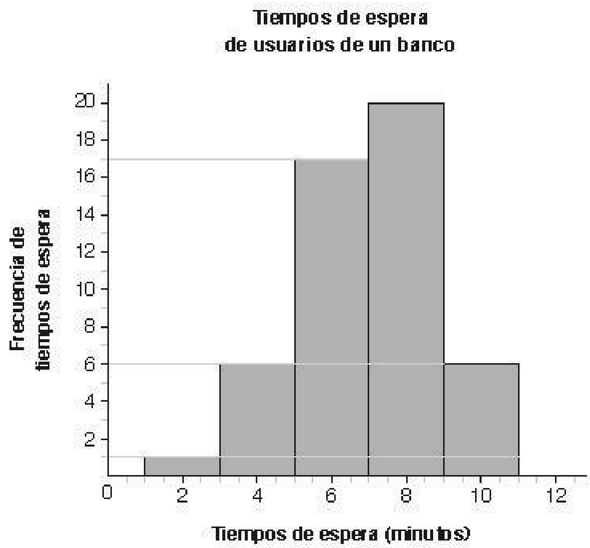
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus propuestas. Además, discutan y respondan: ¿en qué fases de una investigación se requiere hacer gráficas?

Sesión 2. Datos e histogramas

Formen parejas, analicen la información y respondan lo que se solicita.

α

1. En un banco se mide la eficiencia de la atención a los clientes. Cuando llega cada cliente, éste toma un ticket en el que se registra su hora de llegada; cuando el ejecutivo lo atiende recoge, el ticket y lo marca con la hora en que comienza la atención; se calcula entonces su "tiempo de espera" con la diferencia entre el tiempo en que comienza la atención menos el tiempo de llegada. Se obtiene el tiempo de espera de todos los usuarios del banco en un periodo determinado. Con base en esta información, se trazó en la gráfica 8.1, "Tiempos de espera de usuarios de un banco".



Gráfica 8.1 Histograma del tiempo de espera de usuarios en un banco

a) ¿Cuántos usuarios se atendieron en ese periodo? ______

b) ¿Qué representa un número del eje horizontal?, por ejemplo, el 6. ______

______

c) Un número en el eje vertical, por ejemplo, el 17, ¿qué representa? ______

______

d) Escriban que información proporción la primera barra de la gráfica 8.1.

______

e) ¿Cuántos usuarios esperaron entre 5 y 7 minutos? ______

f) ¿Cuál es el intervalo de tiempo de moda? ______

g) En el proyecto inicial se había propuesto que ningún usuario esperara más de 9 minutos. ¿Se cumplió dicha expectativa? ______

h) ¿Cuántos clientes esperaron más de 9 minutos? ______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus razonamientos y argumenten sus propuestas hasta llegar a un acuerdo.

σ

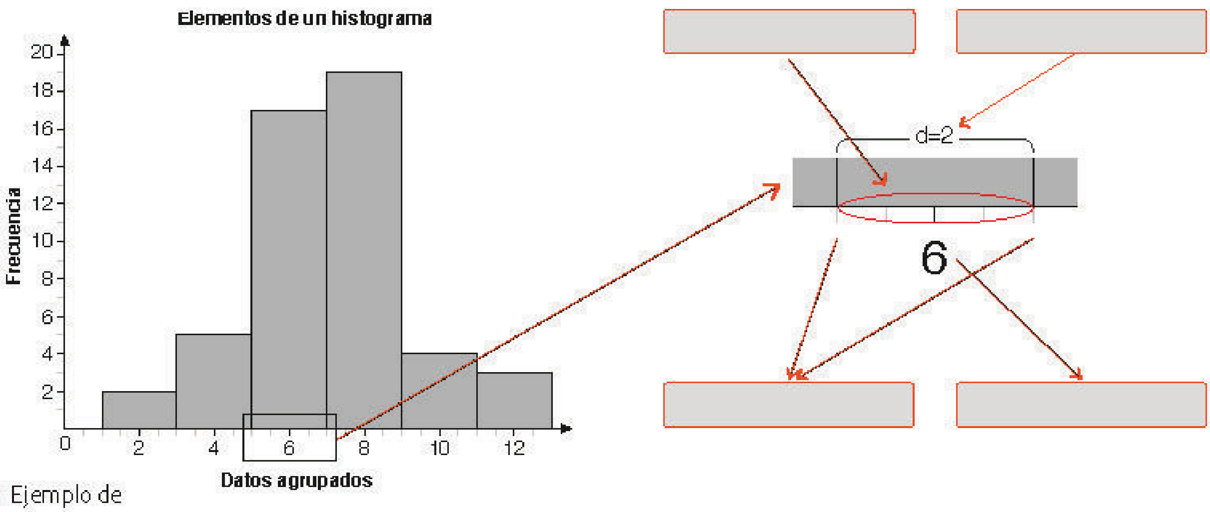
Un **histograma** es una representación gráfica de un conjunto de datos agrupados en intervalos. Estos intervalos forman la base de rectángulos (o barras) cuya altura es el número de datos que caen en el intervalo; en consecuencia, la superficie de cada barra es proporcional a la frecuencia de los valores representados. A diferencia de un diagrama de barras, en un histograma no hay espacios entre las barras que lo forman.

En el histograma se traza un par de ejes coordenados. El eje horizontal representa los valores de la variable en estudio (v, g, tiempo de espera, etc.); la variable debe ser una variable continua, es decir, que puede tomar valores fraccionarios y/o números decimales. Cuando la variable puede tomar sólo valores enteros, entonces es preferible representar los datos en un diagrama de barras y no en un histograma. En el eje vertical de un histograma se representa la frecuencia con que se presentan los datos correspondientes dentro de diferentes intervalos de la variable.

Actividad

Trabajen de forma individual.

2. En la gráfica 8.2 se muestra un ejemplo de un histograma en el que se resalta un intervalo mediante una proyección ampliada. Observa y analiza sus elementos.



Gráfica 8.2 Ejemplo de histograma

3. Con base en la gráfica 8.2 relaciona cada concepto con su definición.

Concepto	Definición
Intervalo	Es la diferencia entre el límite superior e inferior del intervalo.
Marca de clase	Es el conjunto de números que están entre dos límites y también se les suele llamar "clase".
Límites de clase	El punto medio de cada intervalo y es el valor que representa a todo el intervalo.
Amplitud de clase	Es el límite inferior y el límite superior del intervalo.

a) Escriban los nombres correspondientes en los recuadros de la gráfica 8.2.

b) Comparen sus respuestas. Comenten si tuvieron confusiones en identificar las diferentes partes de un intervalo. Expliquen la manera en que los datos se organizan para hacer un histograma utilizando las palabras que aprendieron en esta actividad.

c) Cada uno de los siguientes enunciados corresponde a una fase en la construcción de un histograma. Ordénenlos con un número del 1 al 8 según se llevan a cabo.

____ Contar la frecuencia de datos que cae en cada intervalo.

____ Definir el número de intervalos en que se dividirá el rango.

____ Encontrar el máximo y el mínimo del conjunto.

____ Dibujar en un plano cartesiano los puntos: marca de clase, frecuencia del intervalo.

____ Encontrar el rango (máximo - mínimo).

____ Ordenar los datos de forma ascendente.

____ Encontrar las características de los intervalos: longitud, límites y marcas de clase.

____ Dibujar los rectángulos y asignarles nombre; colocar más datos al histograma.

Problemas

Trabajen en parejas para resolver los problemas.

4. Los datos de la tabla 8.2 corresponden a los tiempos de espera de 50 usuarios de un banco que fueron representados en la gráfica 8.1 en la actividad 1 de esta sesión. Analicen los datos, lean y respondan.

Tabla 8.2 Tiempo de espera (en minutos) de los usuarios de un banco

6.4	5.4	4.2	7.5	5.6	6.3	8.2	3.7	7.1	5.4
7.7	8.5	6.7	10.0	2.5	7.1	6.1	8.6	9.5	8.1
9.3	4.1	6.2	7.6	6.9	9.5	7.1	3.8	7.2	5.6
7.3	7.3	8.3	4.5	8.7	6.2	5.1	10.4	6.5	7.0
7.7	10.7	6.2	8.3	5.9	7.4	7.7	6.1	6.4	4.3

a) ¿Cuál es el dato de menor magnitud (mínimo)? ____________________

b) ¿Cuál es el dato de mayor magnitud (máximo)? ____________________

c) Para hacer la gráfica, el diseñador decidió considerar el intervalo que va de 1 a 11 minutos. ¿Dentro de este intervalo están todos los datos? ____________________

d) El diseñador decidió dividir el intervalo que va de 1 a 11 en cinco partes. Indiquen los cinco intervalos.

e) Para cada uno de los intervalos anteriores, indiquen cuántos datos están en sus extremos, incluyan los datos que coinciden con el extremo izquierdo. Luego completen la tabla 8.3.

Tabla 8.3 Frecuencia de tiempos

Intervalo	Datos dentro del intervalo
Total	50

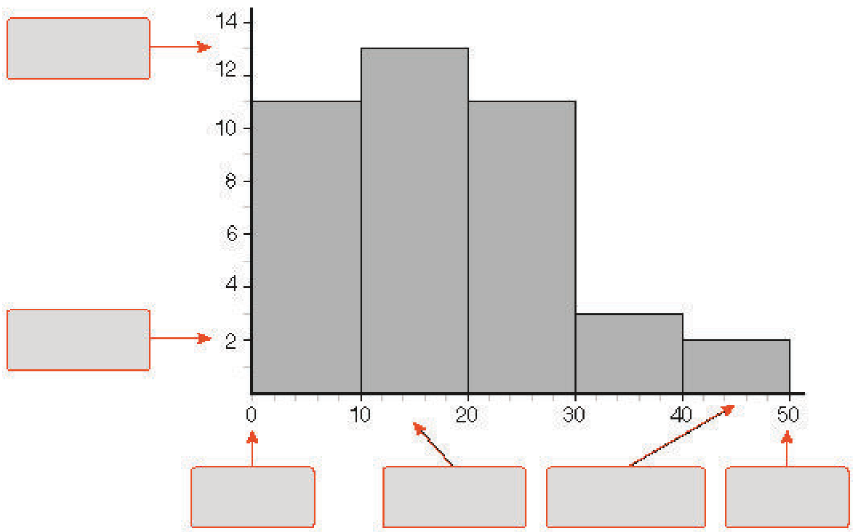
f) Indiquen qué relación hay entre la tabla 8.3 y la gráfica 8.1. ______________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus procedimientos. Consideren lo que se hizo y enlisten en su cuaderno, los pasos que deben seguir para construir un histograma.

5. En la gráfica 8.3 se indican cinco puntos importantes de un histograma. Escriban en los cuadros el nombre de cada uno de ellos; tómenlos de la siguiente lista.

Frecuencia mínima	Frecuencia máxima	Máximo
Mínimo	Valores menos frecuentes	Valores más frecuentes

Gráfica 8.3 Esqueleto de un histograma



a) Escriban los valores mínimo y máximo de la variable. ______________________

b) Escriban la frecuencia mínima y la frecuencia máxima. ______________________

c) Escriban el intervalo que tiene menor frecuencia. ______________________

d) Escriban el intervalo que tiene mayor frecuencia. ______________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, argumenten sus respuestas hasta llegar a un acuerdo.

6. En una práctica los estudiantes del taller de enfermería midieron la **presión sanguínea** de 50 compañeros para presentarlos en un histograma y analizar el comportamiento. En la tabla 8.4 de la siguiente página se reproducen las medidas que obtuvieron de la presión sistólica (para simplificar se han omitido las presiones diastólica, pero en la práctica siempre van juntas). Sigan los pasos para la construcción de un histograma y dibújenlo en su cuaderno.

En otras palabras

La **presión sanguínea** o arterial es la fuerza de presión ejercida por la sangre circulante sobre las paredes de las arterias. Su medida tiene dos componentes: presión sistólica y presión diastólica. Cuando se mide la presión sanguínea o arterial se obtiene dos números que se escriben en la forma a/b. El primer número es la presión máxima que ejerce el corazón del sujeto cuando late (presión sistólica) y el segundo número es la cantidad de presión que hay en las arterias entre un latido y otro (presión diastólica). La diferencia numérica entre la presión arterial sistólica y diastólica se llama presión diferencial.

Tabla 8.4 Medida de la presión sistólica de 50 estudiantes

122.3	101.5	137.1	122.8	132.2	132.9	115.7	103.4	107.7	124.9
121.4	115.1	121.2	129.5	87.1	135.9	110.7	141.7	118.0	125.2
114.3	131.7	117.7	145.6	117.6	110.0	126.4	78.6	129.0	130.8
123.3	130.7	105.5	87.6	127.8	136.5	120.9	104.0	120.8	103.8
144.4	117.7	122.1	106.9	108.9	128.3	124.2	129.4	113.2	100.8

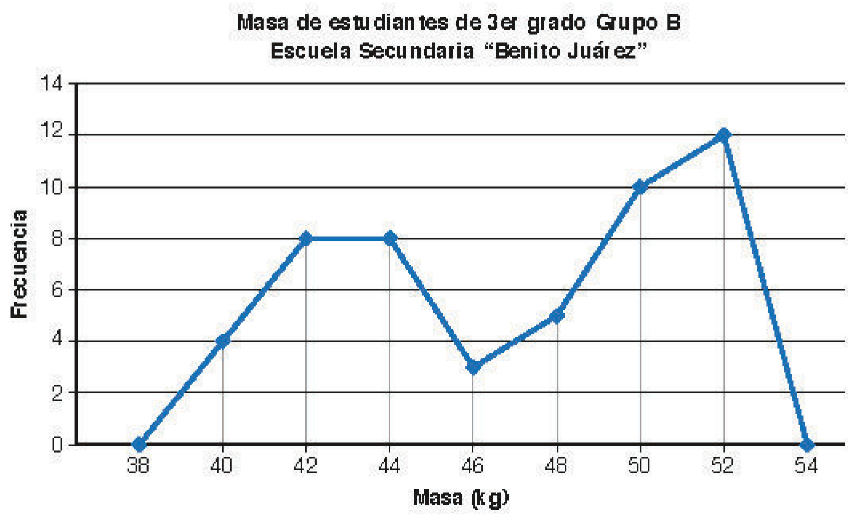
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus histogramas y comenten los pasos que cada equipo siguió en su construcción. Probablemente no serán los mismos pasos pero evalúen si el resultado es la construcción correcta del histograma.

Sesión 3. Polígonos de frecuencia

Formen parejas y hagan lo que se pide.

α

1. En la escuela secundaria Benito Juárez se calculó la *masa* de cada estudiante del grupo B con ayuda de una balanza. La *masa* se mide en kilogramos y en la vida cotidiana se suele llamar informalmente "el peso". Se registraron las medidas de la masa de cada alumno y se organizaron los datos. Con base en ellos se construyó el polígono de frecuencia de la gráfica 8.4. Observen la gráfica y respondan las preguntas.



Gráfica 8.4 Polígono de frecuencia

a) ¿La masa de cuántos estudiantes se representa en el polígono de frecuencia?

b) ¿Qué representa un número en el eje horizontal, por ejemplo, 46?

c) ¿Qué representa un número en el eje vertical, por ejemplo, 10?

d) Escriban la información que proporciona el segundo “cuadrito” del polígono.

e) ¿Cuántos estudiantes tienen una masa entre 43 kg y 45 kg?

f) ¿Cuál es el intervalo de moda?

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen sus razonamientos y argumente sus propuestas hasta llegar a un acuerdo.

Polígono de frecuencia se llama a una gráfica que se construye a partir de un histograma. Para hacerlo, se ubican los puntos medios de la parte superior de los rectángulos del histograma, además de un punto sobre el eje horizontal medio intervalo antes del mínimo y otro medio intervalo por arriba del máximo. Se unen los puntos de izquierda a derecha con segmentos de recta formando una línea quebrada que comienza y termina sobre la recta horizontal. En la siguiente actividad tendrán la oportunidad de precisar esta idea.

Actividad

σ

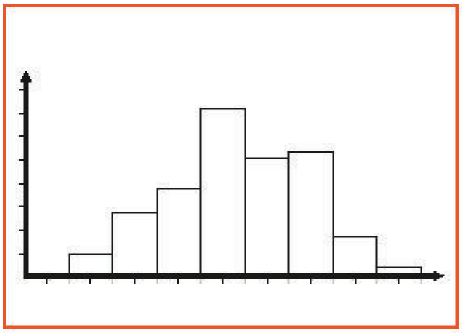
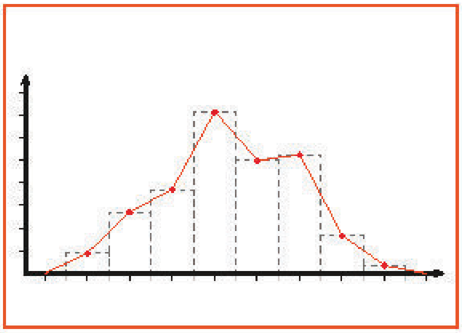
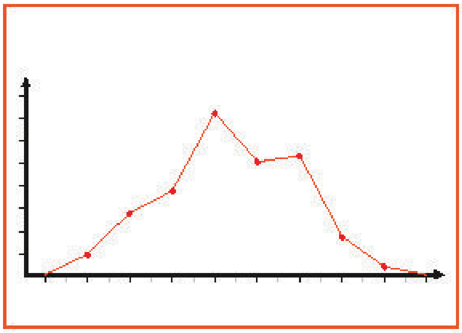
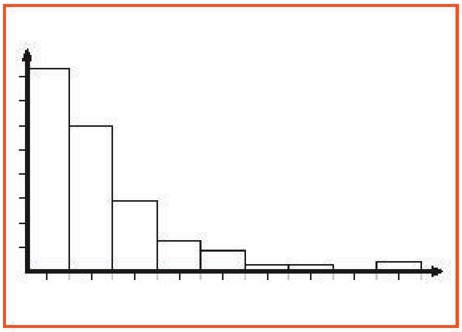
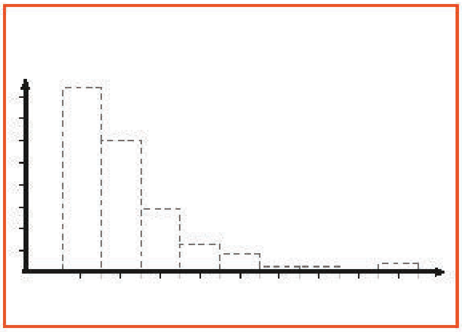
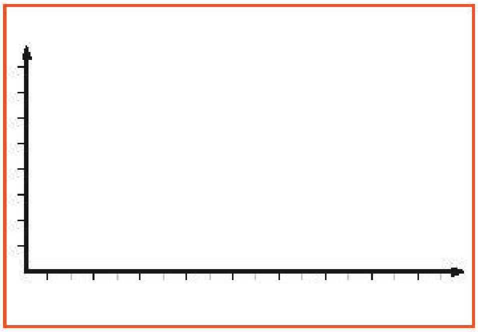
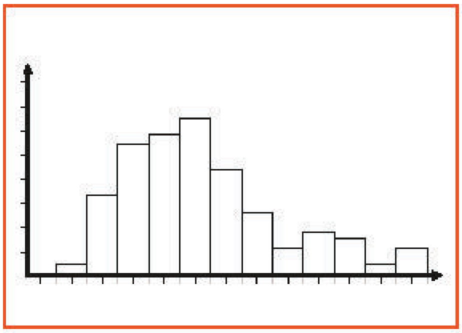
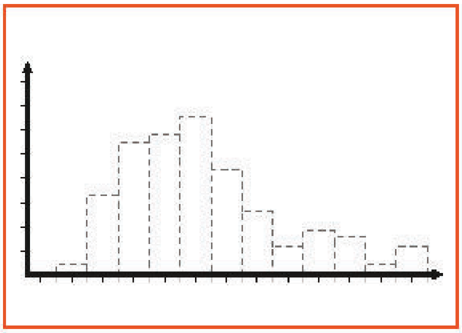
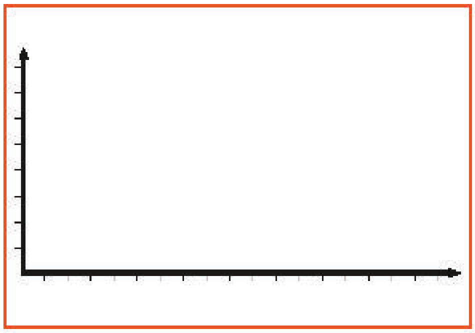
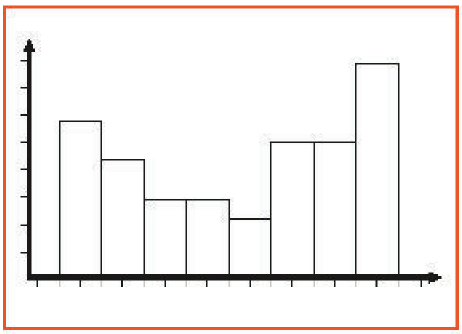
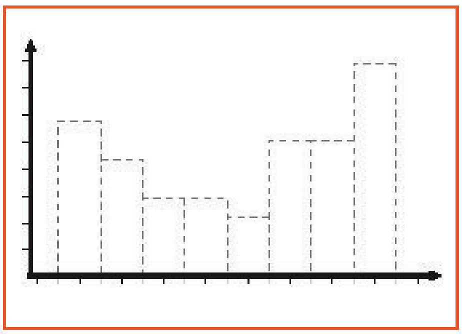
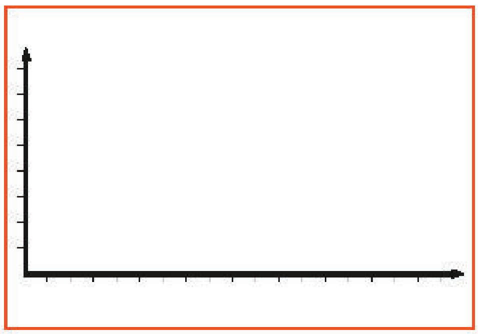
Formen parejas y hagan lo que se pide.

2. En la primera fila de la tabla 8.5, se muestra cómo construir un polígono de frecuencia a partir de un histograma.
   a) Tracen en cada celda vacía de la tabla el polígono de frecuencia correspondiente.
   b) Escriban una V enseguida del enunciado más acertado.
   - El polígono de frecuencia ofrece más información que el histograma.
   - Es más fácil comparar dos polígonos de frecuencia que dos histogramas.
   - Es menos laborioso hacer un polígono de frecuencia que un histograma.

   c) ¿Qué ventajas tiene un polígono de frecuencia sobre un histograma?

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas.

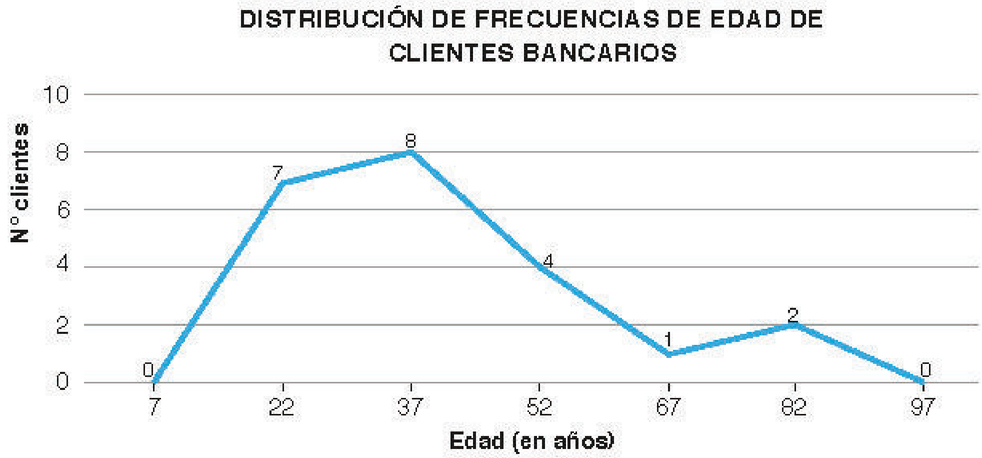
Tabla 8.5 Paso de histogramas a polígonos de frecuencia

Histogramas	Histograma y polígono	Polígonos de frecuencia
		
		
		
		

Problemas

Formen parejas, lean y respondan,

3. En un portal de internet se encuentra el polígono de frecuencia (gráfica 8.5). Obsérvenlo y respondan las preguntas.



Gráfica 8.5 Polígono de frecuencia

a) ¿Cuál es el tema de la información de la gráfica, es decir, de qué se trata? __________

b) ¿Cuál es el número de datos sobre los que se basa la gráfica? __________

c) ¿Cuáles son las marcas de clase del histograma sobre el que se construye el polígono de frecuencia? __________

d) ¿Cuál es la longitud de los intervalos? __________

e) ¿Cuáles son los límites de los intervalos? __________

f) ¿Cuál es el intervalo de moda? __________

g) ¿Qué intervalo, diferente de los intervalos de los extremos, tiene menor frecuencia? __________

h) Formulen algunas proposiciones derivadas de la gráfica; por ejemplo, ¿cuál es el intervalo de moda?, o ¿cuál es el intervalo de edad en el que se tienen más clientes? __________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, revisen y argumenten sus propuestas hasta que lleguen a un acuerdo.

4. Los datos de la tabla 8.6 corresponden a los tiempos de espera de los pacientes para ser atendidos en las áreas de urgencias de los hospitales públicos de México.

Tabla 8.6 Frecuencias de tiempos de espera, agrupados en intevalos, en área de urgencias de hospitales. Año 2011.

Intervalo de clase (minutos)	Marca de clase (minutos)	Frecuencia (No. de hospitales)
8.8 - 17.4		9
17.4 - 26.0		15
26.0 - 34.6		4
34.6 - 43.2		3
43.2 - 51.8		1
Total		32

a) Calculen las cinco marcas de clase, llenen la segunda columna de la tabla 8.6 y localícenlas en los ejes coordenados de la gráfica 8.6.

Gráfica 8.6 Tiempos de espera de pacientes en hospitales

b) Tracen el polígono de frecuencia correspondiente utilizando los ejes coordenados de la gráfica 8.6.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus gráficas. Si no son iguales, busquen el motivo de la divergencia y corrijan.

Sesión 4. Gráficas de series de tiempo

α

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide

1. Observen la gráfica 8.7 sobre la producción anual de dos fábricas de bicicletas; luego respondan.

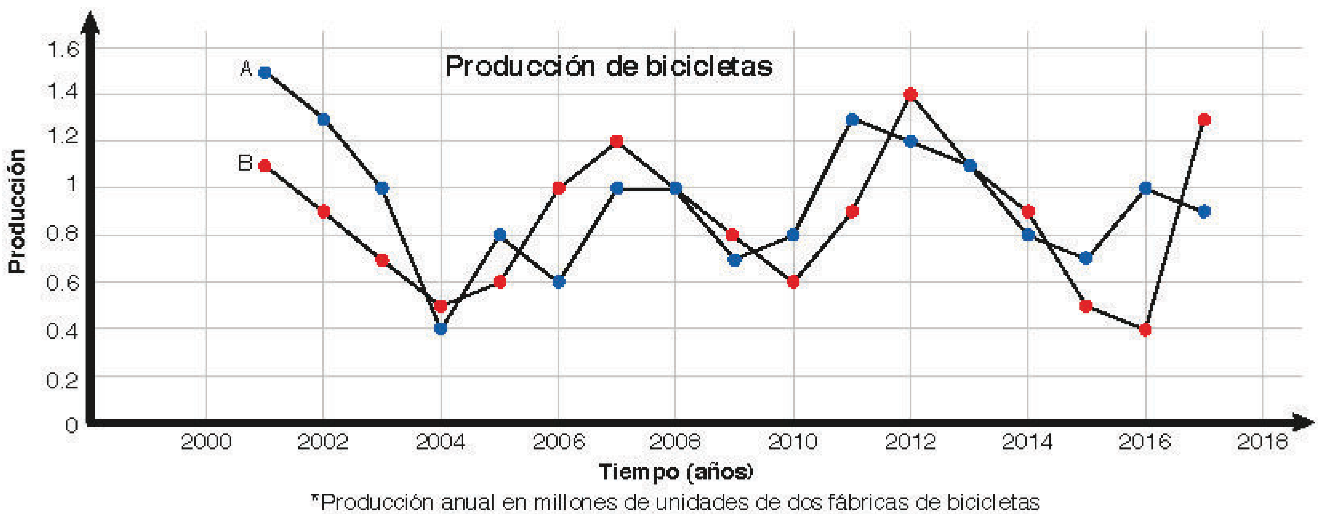
   a) ¿De cuáles y cuántos años se informa en la gráfica?

   b) ¿En qué años fue mayor la producción en la fábrica A que en la fábrica B?

   c) ¿En qué años fue mayor la producción en la fábrica B que en la fábrica A?

   d) ¿En qué años las dos fábricas tuvieron la misma producción?

   e) Aproximadamente, ¿cuál fue la producción de cada fábrica en el año 2001?



Gráfica 8.7 Datos de la producción anual de dos fábricas de bicicletas

Una **serie de tiempo** consiste en los datos estadísticos que se recopilan, observan o registran en intervalos de tiempo regulares (diario, semanal, semestral, anual, entre otros). Una serie suele presentarse mediante una **gráfica de línea**, que tiene un aspecto parecido a los polígonos de frecuencia pero son diferentes; la razón es que en una serie de tiempo el eje horizontal representa una variable de tiempo (segundos, minutos, días, meses, años) y en el eje vertical representa una medida o cantidad que no es necesariamente una frecuencia.

Problemas

Trabajen en equipos de tres integrantes y hagan lo que se pide.

2. Los datos de la tabla 8.7 representan el precio del dólar (en pesos mexicanos) en cada mes del año 2017, según la información de un banco.

Tabla 8.7 Precios del dólar durante 2017 según un banco conocido

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Precio (pesos)	20.68	19.93	18.68	18.87	18.62	18.12	17.87	18.12	19.12	19.12	18.62	19.68

a) Tracen en la gráfica 8.8, la gráfica de la serie de tiempo de los datos de la tabla 8.7.

b) ¿En qué mes el precio del dólar estuvo más bajo y cuánto costaba?

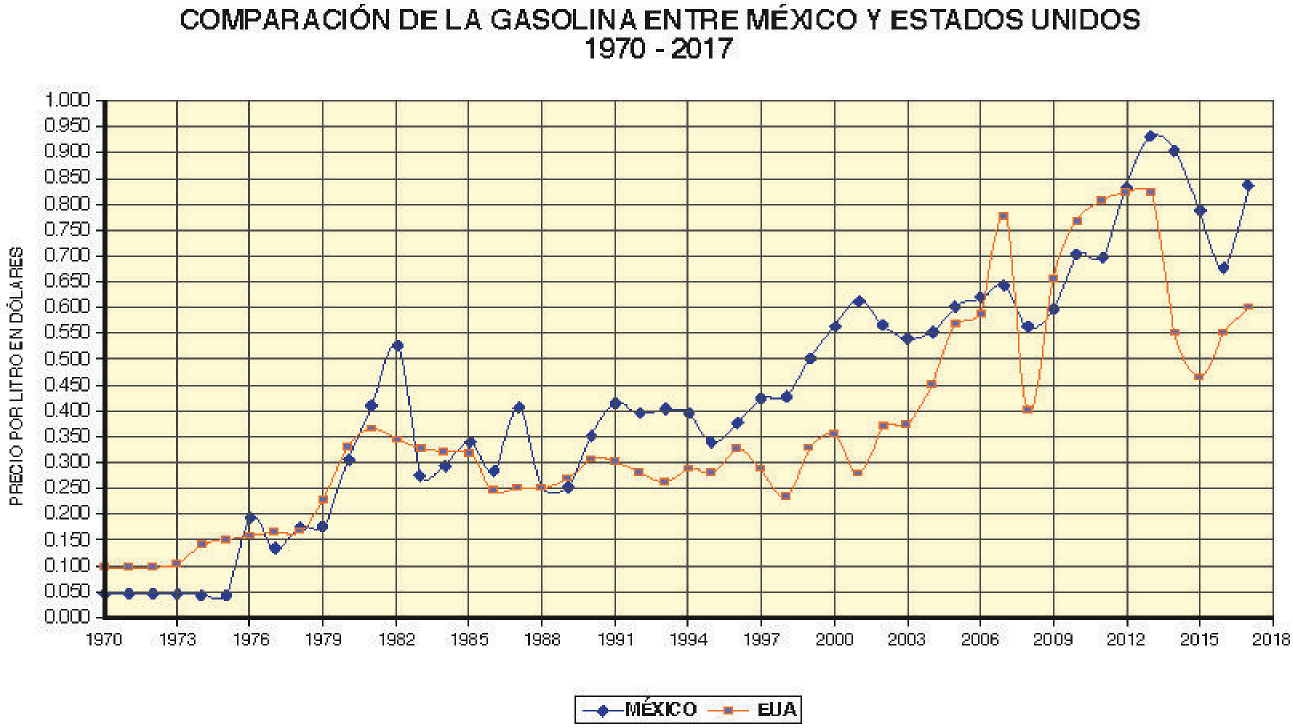
____

c) ¿En qué mes el precio del dólar fue mayor y cuánto costaba? _______________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen su procedimiento y argumenten su propuesta hasta llegar a un acuerdo.

Gráfica 8.8 Datos de la cotización del dólar durante 2017 en México

3. La gráfica 8.9 muestra una comparación de los precios de venta al público, al final de cada año, de las gasolinas sin plomo de México y Estados Unidos de América de manera que se puede determinar la diferencia de precios entre ambos países. Con base en dicha gráfica respondan.



Gráfica 8.9 Precios de gasolina en México y EUA.

Fuente: http://www.mexicomaxico.org/Voto/GasolMexUSA.htm

a) ¿En qué periodos de años la gasolina fue más barata en México que en Estados Unidos? ______________________________

____

b) ¿En qué año o años la diferencia en el precio de la gasolina fue más grande y a qué país favoreció? ______________________________

____

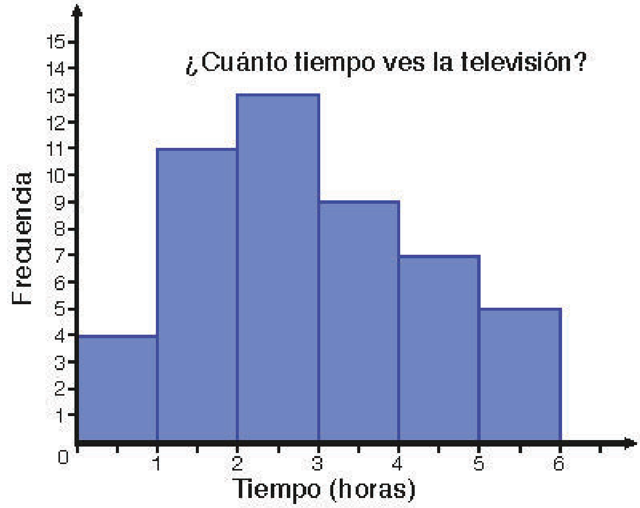
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen su procedimiento y argumenten su propuesta hasta llegar a un acuerdo. Discutan la importancia de las gráficas de series de tiempo para comparar trayectorias. Propongan, en conjunto, tres casos en los que consideren que se pueden usar las gráficas de series de tiempo. ______________________________

____

Retomando una mirada previa

Trabajen en equipo para desarrollar las actividades de esta sección.

1. Los alumnos de un equipo de trabajo hicieron la encuesta que se propuso al principio de esta secuencia sobre el tiempo que las personas ven TV, obtuvieron datos y los organizaron en el histograma de la gráfica 8.10.



Gráfica 8.10 Histograma sobre el tiempo que ven la TV los sujetos encuestados

a) ¿De cuántos estudiantes fue la muestra de la encuesta aplicada? ______

b) ¿Cuál es el intervalo de moda? ______

c) ¿Obtuvieron datos similares de la encuesta que ustedes realizaron? Discutan las diferencias y similitudes que encontraron. ______

d) Dibujen en el espacio siguiente, un solo plano con los dos polígonos de frecuencia, el que ustedes obtuvieron y el que se muestra en la gráfica 8.10. Después, reúnanse con otro equipo y comparen sus histogramas; comenten sobre los rasgos similares y diferentes entre los resultados de los equipos.

En otras palabras

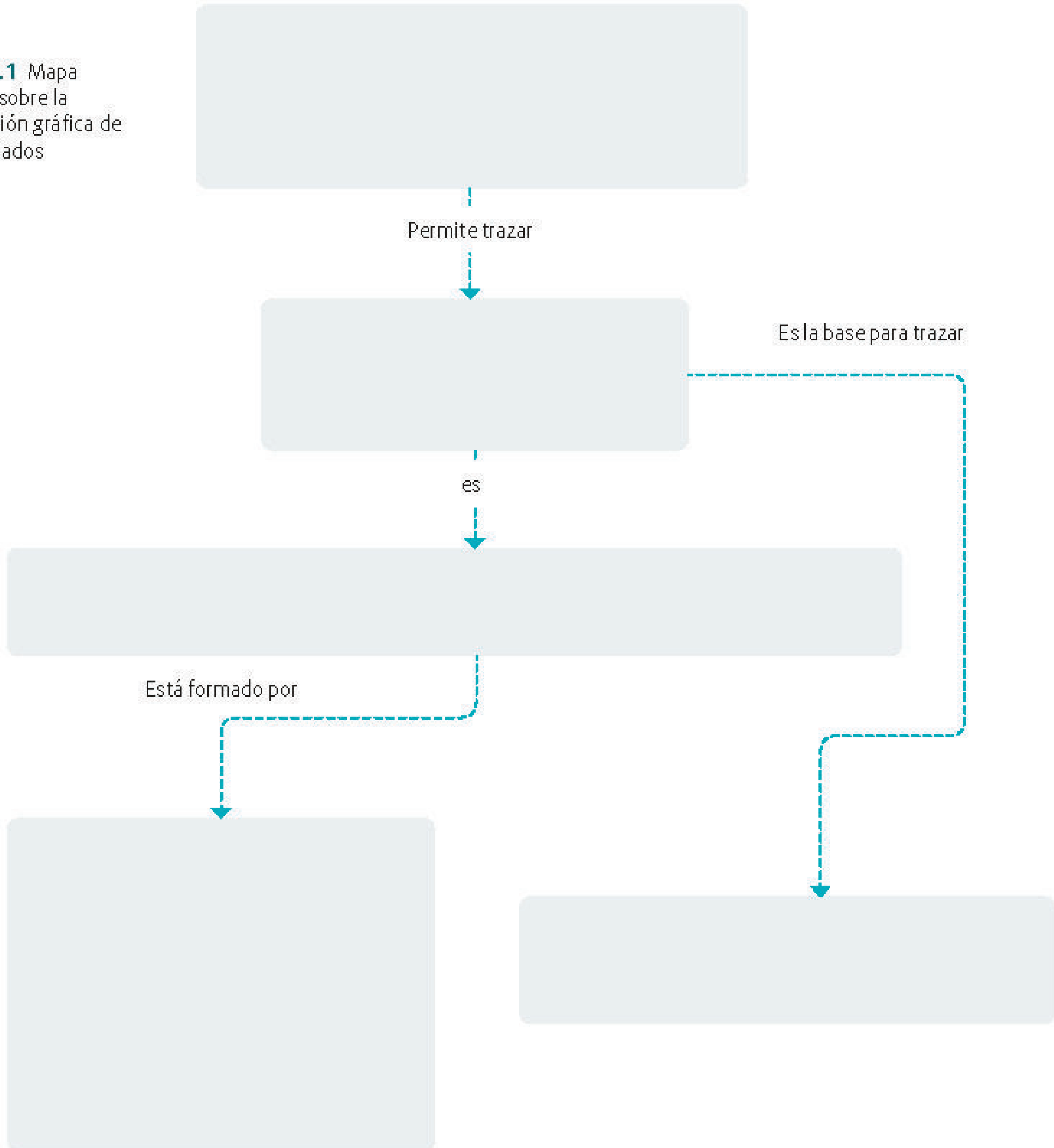
En estadística, una **muestra** es la selección de un número de observaciones de una población objeto.
Una muestra es aleatoria cuando la elección se realiza de manera tal que todos los elementos de la población tiene la misma oportunidad de quedar en la muestra.

En retrospectiva

Escriban cada una de las siguientes expresiones en un recuadro del esquema 8.1, de manera que muestre las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Conjunto de datos.
- Histograma.
- Intervalos, marcas de clase, límites de clase, amplitud de clase.
- Polígono de frecuencia.
- Representación gráfica de un conjunto datos agrupados.

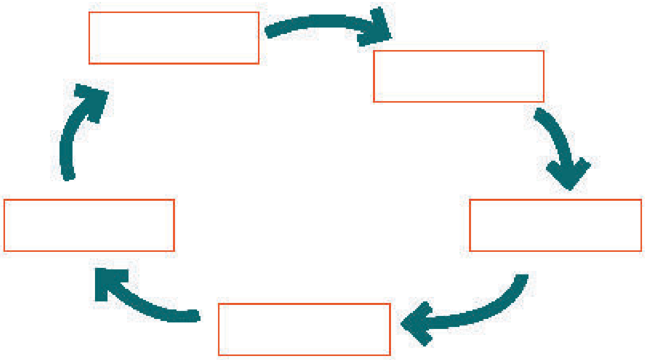
Esquema 8.1 Mapa conceptual sobre la representación gráfica de datos agrupados



¿Qué aprendí?

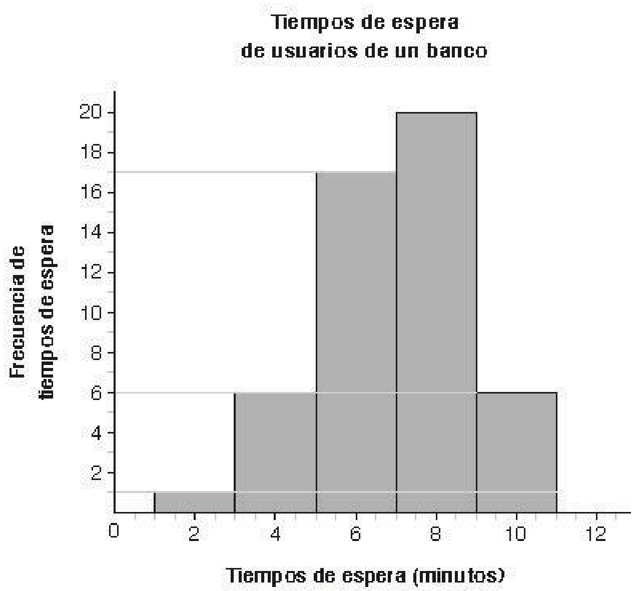
Resuelvan individualmente los problemas.

1. Una forma simplificada del ciclo investigativo se puede formar con los términos de la lista que se encuentra al lado del esquema 8.2. Coloquen los términos donde corresponda en la figura de la derecha de manera que refleje el ciclo de una investigación.
   - Análisis
   - Conclusión
   - Datos
   - Diseño
   - Problema



Esquema 8.2 Ciclo investigativo

2. Se obtuvo una muestra aleatoria de tamaño 30 de un listado sobre la tasa de natalidad de 229 países. Las 30 tasas de natalidad fueron agrupadas en ocho intervalos de un ancho de una unidad. En la *gráfica 8.11* se muestran la gráfica de los datos obtenidos.



Gráfica 8.11 Histograma de tasa de natalidad (2017)

   a) ¿Qué significa la primera barra del histograma? ______________________

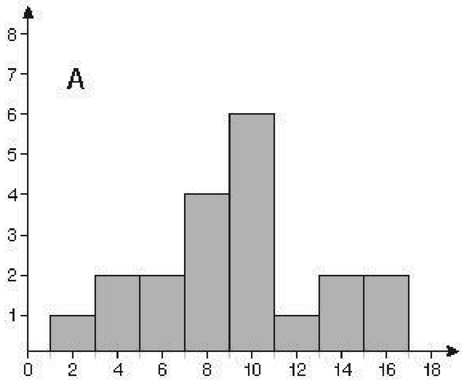
   b) ¿Qué significa la última barra del histograma (la que está en el extremo derecho)? ______________________

a) ¿Cuál es aproximadamente la tasa de natalidad más baja y cuál la más alta?

b) ¿Cuál es el intervalo de moda?

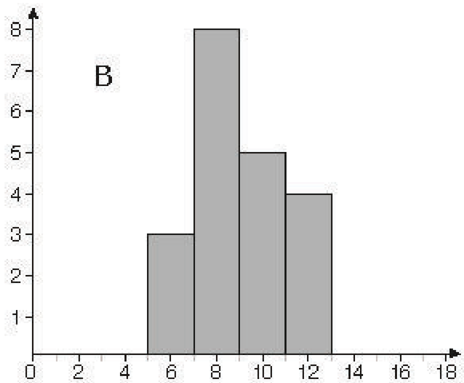
3. En la columna de la izquierda se muestran histogramas y, en la derecha, tres conjuntos de datos. Relacionen con una raya cada polígono de frecuencia con el conjunto de datos que le corresponde.

Histogramas	Conjuntos de datos



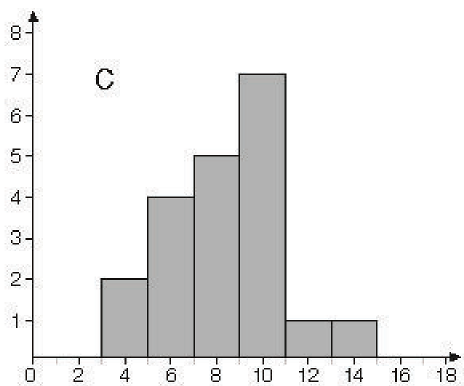
1. Medidas de longitud de un grupo de ballenas (metros)

9.3	8.5	10.7	5.1	8.4
7.9	9.7	11.0	6.9	7.6
7.2	11.7	10.2	6.1	8.7
7.8	12.1	12.3	9.8	8.6



2. Medidas de longitud de un grupo de ballenas (metros)

10.5	4.9	11.0	16.6	10.9
6.6	9.4	7.8	15.5	8.2
2.7	9.1	8.4	5.4	7.5
12.6	13.7	10.2	4.1	14.0



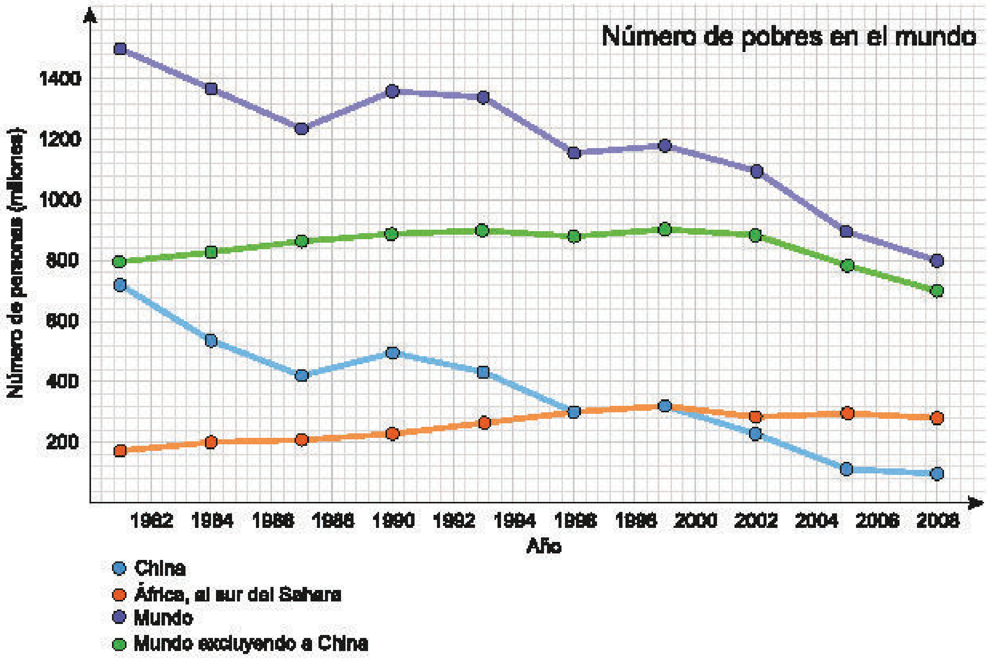
3. Medidas de longitud de un grupo de ballenas (metros)

6.7	7.5	11.0	7.8	8.1
7.9	9.7	9.1	10.6	13.4
4.8	11.3	10.8	6.9	5.4
4.9	8.6	9.7	5.5	9.6

a) ¿Qué estrategia siguieron para identificar el conjunto de datos que corresponde a cada histograma? __________

b) Para cada histograma, determinen las marcas y límites de clase y longitud de los intervalos. __________

4. En la gráfica 8.12 se muestran datos históricos sobre la cantidad de personas pobres en China y África al sur del Sahara. Analícenla y respondan las preguntas.



Gráfica 8.12 Datos sobre pobreza en China y África

a) Aproximadamente, ¿en cuánto disminuyó en China la pobreza de 1982 a 1987? __________

b) ¿En cuánto, aproximadamente, aumentó la pobreza en el mismo periodo en África al sur del Sahara? __________

c) ¿En qué años hubo un aumento de personas pobres en China? __________

d) ¿Hay algún periodo de disminución de personas en pobreza en África al sur del Sahara? __________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo. Comenten el significado de la frase "El milagro Chino en economía".

En otras palabras

Evaluación. Bloque 1

1. Se hizo una amplificación del triángulo de lados 3, 4 y 5 mostrado en la figura E1.1. Observa los lados que miden 5 y 9 unidades en los triángulos original y amplificado. ¿Cuáles son las dimensiones del segundo triángulo y cómo se obtienen?

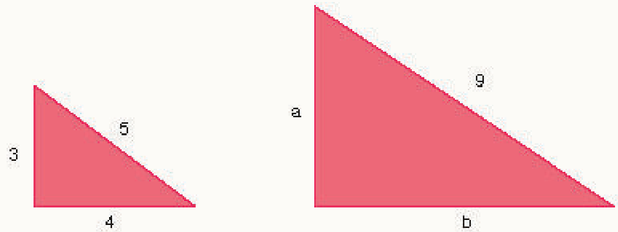


Figura E1.1 Ampliación de un triángulo

a) Multipliquen y dividan por números enteros las medidas de cada lado del triángulo pequeño para hallar las dimensiones del triángulo grande. ______

______

b) Determinen el procedimiento para encontrar las dimensiones del triángulo grande mediante un solo paso y utilizando números decimales. ______

______

2. En la ventana de la herramienta *Cambiar tamaño* del programa *PowerPoint* se puede cambiar el tamaño de un objeto al sustituir el número 100 (tamaño original) por otro entre 0 y 999 para agrandar o achicar la figura seleccionada.

a) Completen la tabla E1.1 anotando en la fila "Por cada unidad", el número decimal (constante de proporcionalidad) por el que debe multiplicarse la medida original (100) para obtener la medida de la fila "Por cada 100".

Tabla E1.1 Medidas y constante de proporcionalidad en la ampliación de figuras

Por cada 100	120	140	160	280	300	320	340	360	380
Por cada unidad									

b) Se cambia el tamaño de una figura de 100 a 180 y la resultante se transforma de 100 a 120. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre la primera y tercera figuras? ______

3. Un refrigerador tenía una temperatura de 3 °C hace una hora y ahora indica −6 °C. ¿De cuántos grados fue el cambio en la temperatura del refrigerador?

______

4. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x^5)^3 =$

b) $z^6z^4 =$

c) $\dfrac{w^3}{w^7} =$

d) $t^{-6} \times t^4 =$

Evaluación

5. La masa de un iceberg se reduce tres toneladas cada cinco meses. Si su masa inicial (en $t = 0$) es de 120 toneladas, ¿cuál será su masa después de 50 meses? Completen la tabla E1.2.

Tabla E1.2 Variación de la masa de un iceberg según el tiempo transcurrido

t (meses)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
M (ton)											

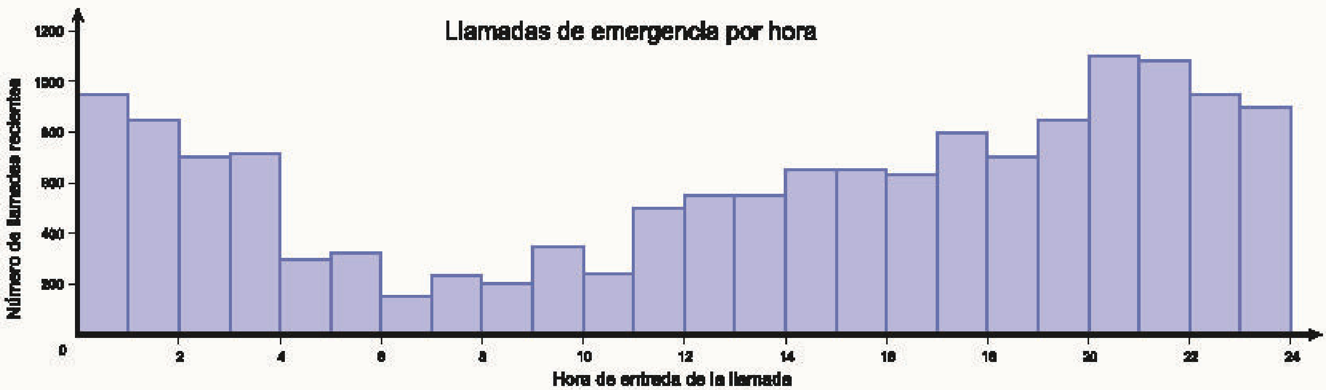
a) Escriban la ecuación de la masa *M* del iceberg con respecto al tiempo *t*. ______

______

b) ¿Cuánto tiempo tardaría en deshacerse el iceberg si sigue perdiendo tres toneladas cada cinco meses? ______

6. La galaxia más cercana a la Tierra es la nebulosa Andrómeda (M31), que se encuentra a 2.5 millones de años luz. Si un año luz equivale a 9.46×10^{12} km, escriban la distancia, en kilómetros y notación científica, que hay entre la Tierra y Andrómeda. ______

7. La gráfica E1.1 muestra los resultados la cantidad de llamadas de emergencia recibidas un sábado en un centro de la policía. El personal que ahí labora tiene tres turnos: de 7 a 15 hrs, 15 a 23 hrs y de 23 a 7 hrs del día siguiente.



Gráfica E1.1 Llamadas de emergencia recibidas en un día

a) Tracen una línea vertical en la hora que hay cambio de turno.

b) Marquen líneas horizontales en el histograma que muestren las tres clases.

c) ¿En qué turno se reciben más llamadas de emergencia? ______

d) ¿Cómo deben distribuir los 10 000 policías de la corporación en los tres turnos? ______

8. Usa el método de aproximación para calcular las raíces cuadradas.

a) $\sqrt{151}$

b) $\sqrt{99}$

c) $\sqrt{213}$

Evaluación

BLOQUE 2

¿De qué se trata?

En este bloque te enfrentarás a problemas de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos diversos, con la posibilidad de utilizar las herramientas de álgebra que has construido. Con relación al álgebra, ampliarás los procedimientos para plantear y resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de situaciones problemáticas.

También estudiarás los temas de medida de tendencia central y variación, en los que podrás ver cómo se entienden e interpretan conjuntamente ambas medidas (media y variación) mediante actividades de resolución de problemas. Continuarás con el estudio de la variación lineal y conocerás otro tipo de variación, la variación inversa; podrás apreciar algunas aplicaciones de ambas. Finalmente, estudiarás el tema de conversiones cuyo conocimiento es fundamental para cualquier persona, pues todos nos enfrentamos a problemas de conversión en todas partes, ya sea en la actividad laboral o profesional.

BLOQUE 2

S9 Proporcionalidad directa y reparto proporcional

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Reúnanse en equipos de tres integrantes para analizar y resolver el problema.

Julio, Amira y Rafael iniciaron un negocio juntos. Julio puso el 25% de la inversión, Amira el 35% y Rafael el 40%. Después de dos años, sus ganancias netas fueron de $128 750.00. ¿Cuánto le toca a cada uno si el reparto es proporcional de acuerdo a lo que cada uno invirtió? ______

Sesión 1. Relaciones de proporcionalidad directa

α Trabajen en parejas. Lean la información de recuadro y efectúen las actividades.

1. ¿Cuáles de las siguientes situaciones presentan una relación de proporcionalidad directa entre las variables? Argumenten su respuesta.

   a) Una persona gana $2 000 a la semana y mide 1.70 m. ______

   b) Raquel camina a la misma velocidad todas las mañanas. Un día caminó 300 metros en 4 minutos, ¿cuánto tardará en caminar 450 metros? ______

   c) Un trabajador tarda 6 horas en pintar una pared. ¿Cuántos trabajadores que trabajen a la misma velocidad se requieren para pintar la misma pared en 2 horas? ______

   d) El kilogramo de huevo cuesta $28.00. Mariela compró medio kilogramo. ¿Cuánto pago? ______

   e) Una caja contiene 32 bolsas de galletas y en una bodega hay 16 cajas. ¿Cuántas bolsas de galletas hay en la bodega? ______

   f) Juan vende autos usados y gana $5000 mensuales más 10% de comisiones. Si este mes vendió $120 000, ¿cuánto ganó? ______

g) ¿Cuáles son las dos propiedades que usaste para determinar cuáles de las relaciones anteriores eran de proporcionalidad directa? ______________________

2. En la tabla 9.1 se presenta una lista de enunciados. En la columna derecha escribe un número del 1 al 3 para calificar el grado en el que estás de acuerdo con cada enunciado, donde 1 significa "no estoy de acuerdo en absoluto", 2 "estoy de acuerdo a veces" y 3 significa "estoy totalmente de acuerdo".

Autorregulación

Tabla 9.1 Aspectos de proporcionalidad directa

Enunciado	Calificación
1. No recuerdo haber estudiado proporcionalidad directa en grados anteriores.	
2. Recuerdo haber estudiado proporcionalidad directa en grados anteriores, pero no recuerdo de qué se trataba.	
3. Se me había olvidado lo que estudié de proporcionalidad directa en grados anteriores, pero al resolver los incisos a) a g) lo fui recordando.	
4. Estoy seguro de que mi respuesta al inciso g) es correcta.	

3. Trabajen individualmente. Un camión de carga avanza a velocidad constante. Dos horas después de ir en esta velocidad ha recorrido 120 kilómetros.

a) ¿A qué velocidad avanza? ______________________

b) Completen la tabla 9.2 que corresponde a la relación entre tiempo y distancia del camión de carga. Después, reúnanse con un compañero para responder las siguientes preguntas.

Tabla 9.2 Recorrido de un camión de carga

Tiempo de recorrido (h)	Distancia recorrida (km)
1	
2	120
	180
5	
8	480
	600

c) ¿A qué tipo de relación corresponden los datos de la tabla 9.2?

d) En cada renglón de la tabla, ¿qué relación se cumple entre el tiempo y los kilómetros avanzados?

e) En el primer renglón de la tabla obtuvieron la distancia que recorre el camión en una hora. En el cuarto renglón obtuvieron la distancia recorrida en cinco horas. ¿Qué relación existe entre esas dos distancias?

f) Comparen los tiempos de recorrido y las distancias respectivas en los renglones de 5 y 10 horas. ¿Qué observan?

g) Comparen los tiempos de recorrido y las distancias respectivas en los renglones de 1, 2 y 3 horas. ¿Qué observan?

4. Mauricio va a hacer chilaquiles. Con 750 gramos de tortillas alcanza para 6 personas. Calculen para cuántas personas alcanzan los chilaquiles con 1 kilogramo de tortillas.

5. El manual del auto de María José indica que el automóvil en promedio rinde 14 km por litro; por experiencia ella sabe que este valor es aproximado y que cambia con el uso que se le va dando al automóvil. El tanque de gasolina del automóvil tiene una capacidad de 55 litros.

a) De acuerdo con lo que dice el manual, ¿será suficiente un tanque lleno para ir y volver de Ciudad de México a Veracruz lo cual corresponde aproximadamente a 700 kilómetros? Justifiquen su respuesta.

b) Según la información del manual del auto, ¿cuánto gastará aproximadamente María José, de gasolina, en un viaje de 600 km en total?

c) Expliquen cómo se obtiene lo que gasta el carro de gasolina en una distancia de x kilómetros; básense en la información del manual.

d) Expliquen cómo se obtiene los kilómetros que recorre el auto con z litros de gasolina; básense en la información del manual.

6. Para resolver el problema 4, un alumno usó el siguiente razonamiento: "para 1000 g faltan 250 g que es la tercera parte de 750 y la tercera parte de 6 personas es 2. Alcanza para $6 + 2 = 8$ personas en total". ¿Es correcto su razonamiento? ¿Alguien de ustedes lo pensó de esa manera?

ω

* Reúnanse con otra pareja para revisar y comparar sus resultados. Si existe alguna diferencia argumenten cómo encontraron las soluciones y traten de llegar a un acuerdo. Si persisten las dudas, anótenlas en su cuaderno para exponerlas al grupo.

7. En sesión grupal, cada equipo describa cómo resolvieron las actividades 3 a 6.

8. Comenten cuántas maneras diferentes de resolver los problemas encontraron en todo el grupo. ¿Usó alguien el método de obtener el valor unitario aprendido en la primaria? Describan aquí ese procedimiento.

Sesión 2. Valor unitario y otras maneras de resolver problemas de proporcionalidad directa

Trabajen en parejas. Lean los problemas planteados. Antes de resolver cada uno, expliquen qué procedimiento van a aplicar y después resuélvanlo.

α

1. Yara corre en el parque siempre a la misma velocidad. El jueves corrió 2 km en 16 minutos, el viernes corrió 3 km en 24 minutos. ¿Cuánto tardó el sábado en correr 5 km?

2. Tres vacas comen 36 kg de alimento en un día. ¿Cuánto comen en un día seis vacas de la misma raza y edad?

3. Veinte metros de mecate cuestan $84.00. ¿Cuánto mecate se puede comprar con $21.00?

4. Iván vende enciclopedias. Este mes vendió seis enciclopedias iguales y su comisión fue de $1200.00. ¿Cuánto gana por vender una enciclopedia?

En parejas hagan lo siguiente

5. Analicen en sesión grupal, cada problema planteado hasta ahora en esta sesión y llenen las tablas. Identifiquen en cada caso, las variables presentes y cómo se relacionan.

Problema 1	
Tiempo (min)	Distancia (km)
16	2
24	3
	4
	5
48	

Problema 2	
Número de vacas	Cantidad de alimento diario (kg)
	12
3	36
6	
	120
15	

Problema 3	
Cantidad de mecate (m)	Precio ($)
	21
10	
20	84
30	

Problema 4	
Cantidad de enciclopedias vendidas	Comisión ($)
1	
	600
6	1200
	1800

6. Usando las tablas del punto 5 y con base en el análisis que efectuaron, respondan las siguientes preguntas. En cada caso, den un ejemplo que ilustre la relación entre las variables.

a) ¿En el problema 1 qué pasa con el tiempo cuando la distancia aumenta al doble?

b) En el problema 2, ¿qué sucede si dividen cada cantidad de alimento entre el correspondiente número de vacas?

c) Elijan dos renglones de la tabla del problema 3. Multipliquen de manera cruzada los elementos como se indica a continuación.

Cantidad de mecate (m)	Precio ($)

d) Repitan lo que hicieron en el inciso c usando otros dos renglones. ¿Qué sucede?

e) Suma los elementos del segundo y tercer renglones de la tabla del problema 4, cantidad de enciclopedias con cantidad de enciclopedias y comisión con comisión, ¿qué obtienes?

f) Aunque el nombre de las variables y las cantidades cambien, ¿se cumplen las relaciones que encontraron en los incisos a al e en todas las tablas?

Problemas

Trabajen individualmente.

Resuelvan los siguientes problemas, siempre que se pueda usen las propiedades que exploraron en la actividad anterior en los puntos 5 y 6.

7. Olga escribe guiones para programas de televisión y le pagan por página escrita. Por un guion de 30 páginas le pagaron \$10 524. ¿Cuánto gana por página?

8. Una máquina de suajes corta 125 piezas de fomi en 10 minutos, ¿cuántas piezas del mismo material corta en una hora?

En otras palabras

El suaje es una herramienta confeccionada con placa de acero para cortar, doblar o marcar materiales blandos, como: papel, tela, cuero, fomi, etcétera.

9. Un corredor de maratón ha avanzado 3.2 km en los 14 primeros minutos de su recorrido. Si mantiene la velocidad promedio, ¿cuánto tardará en completar los 42 km del recorrido?

10. La escala de un mapa es 1:250 000, esto significa que 1 cm en el mapa equivale a 250 000 cm en la realidad. En el mapa, la distancia entre dos ciudades es de 8 cm.

a) ¿Qué distancia, en kilómetros, hay en realidad entre ambas ciudades?

b) ¿A qué distancia, en el mapa, se encuentran dos ciudades que en la realidad están a 130 km?

11. Comparen sus soluciones y procedimientos para resolver los problemas del 7 a 10. Analicen sus procedimientos y determinen cuál de las propiedades exploradas en los puntos 5 y 6 usaron o si aplicaron alguna otra. Escriban sus conclusiones.

____
____
____

Actividad

Trabajen con la misma pareja con la que llevaron a cabo las actividades de la sección de inicio de esta sesión.

12. Determinen qué propiedad o propiedades de las descritas en la 9.3, usaron para resolver los cuatro problemas de la sección de inicio. Es posible que hayan usado más de una de estas propiedades; si es así, escríbanlas.

    a) Escriban qué propiedad aplicaron en cada caso (adición, división,...).

    - Problema 1. ______________________________
    - Problema 2. ______________________________
    - Problema 3. ______________________________
    - Problema 4. ______________________________

    b) Si sus respuestas coinciden comparen el método que usaron. Si no es el mismo, cada uno por separado resuelva el problema usando el método de su compañero.

    c) Si sus respuestas no coinciden, usen un método diferente al que usaron para resolver el problema en cuestión. Si aún hay discrepancias escriban el problema en cuestión y describan cómo lo resolvió cada uno y cuál fue el resultado de aplicar otro método.

13. En sesión grupal, dos parejas voluntarias expliquen cómo resolvieron los problemas del inicio de la sesión. Después, tres parejas diferentes expongan las soluciones que obtuvieron en alguna de las actividades de la sección δ (*desarrollo*) de esta secuencias.

    * Comparen los procedimientos y si alguna pareja empleó un método diferente a los expuestos, explíquenlo ante el grupo. Discutan cuál o cuáles métodos resultan ser más sencillos de desarrollar.

Sesión 3. Reparto proporcional

α

Trabajen de manera individual. Analicen la situación y respondan las preguntas. Justifiquen sus respuestas.

1. Alicia, Bertha y Rubí compraron un pastel. Alicia puso \$180.00, Bertha dio \$135.00 y Rubí, \$45.00.

   a) ¿Qué parte del pastel pagó cada una? ____________________

   b) ¿Cuánto costó el pastel? ____________________

   c) ¿Qué fracción del pago total aportó cada amiga? ____________________

   ____

σ

Problemas

Reúnanse con un compañero para trabajar los siguientes problemas. Pueden usar calculadora. Redondeen a una cifra decimal.

2. Supongan que las tres amigas mencionadas en el problema 1, venden el pastel y obtienen una ganancia. Por ejemplo, supongan que lo venden en \$400.00.

   a) ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a cada amiga para que el reparto sea proporcional a la cantidad que aportó cada una? ____________________

   ____

Reparto proporcional es un procedimiento que permite repartir una cantidad en partes que guardan entre sí ciertas razones.

   b) Completen los enunciados de acuerdo a la forma proporcional en que se debe repartir el dinero obtenido entre las tres amigas.

   - A Alicia le corresponde __________ partes del dinero, a Rubí __________ partes y a Bertha, __________ partes.
   - Esto es, Alicia debe recibir \$__________, Rubí \$__________ y Bertha, \$__________.

3. Analicen grupalmente la siguiente información. Después, resuelvan la actividad 4.

El procedimiento de reparto proporcional se aplica cuando se tienen dos tipos de cantidades, una de ellas dividida en varias partes o porciones, y se requiere dividir la segunda cantidad en el mismo número de porciones con la condición de que éstas sean proporcionales a las partes que forman la primera cantidad.

Una manera de realizarlo es analizar qué fracción o porcentaje del total representa cada una de las partes de la primera cantidad y obtener las mismas fracciones o porcentajes de la segunda cantidad.

4. Omar, Ana y Mía forman equipo en el trabajo. Su actividad principal es vender membresías de un club. En un mes, Omar consiguió 10 socios, Ana consiguió ocho y Mía 6. Por ese trabajo le pagaron $1 200.00 al equipo y ellos se lo van a repartir proporcionalmente de acuerdo a los socios conseguidos por cada uno.

   a) ¿Qué parte de los nuevos socios consiguió cada amigo? ______

   b) ¿Cómo deben repartirse el dinero? ______

5. Por la reparación de una bomba, los vecinos de los edificios A, B y C de una unidad habitacional, se quedaron sin agua el sábado pasado. El gobierno de la ciudad les envió una pipa con 10 000 L de agua. El agua se repartió de acuerdo al número de personas que viven en cada edificio y la pipa quedó vacía. Al edificio A le tocaron 3 651 L, al B 3 016 L y al C, 3 334 litros.

   a) ¿Qué parte del agua repartida le tocó a cada edificio? Exprésenlo como fracción. ______

   b) Si en total, 130 personas habitan los tres edificios, ¿qué cantidad de vecinos vive en cada uno? ______

Retomando una mirada previa

Sigan trabajando en parejas.

1. Revisen los resultados que obtuvieron en la situación planteada en la sección *Una mirada previa*.

   a) ¿Son correctos? Si no lo son, apliquen los conocimientos que aprendieron sobre reparto proporcional a lo largo de esta secuencia y corríjanlos.

   b) Seleccionen tres problemas de los planteados en la secuencia y escriban un mensaje explicando a un amigo cómo se procede para resolver problemas de reparto proporcional. Tomen como ejemplo los problemas que seleccionaron.

2. Voluntariamente, tres parejas resuelvan frente al grupo, el problema de la sección *Una mirada previa* y las actividades 2 y 3 planteadas de esta sesión.

   a) Otras tres parejas pasen voluntariamente a escribir los mensajes que escribieron en la actividad 5 de esta sesión.

   b) En grupo, elijan el mensaje que parezca más claro y, con la orientación del profesor, corrijan lo que haga falta. Escríbanlo a continuación.

______

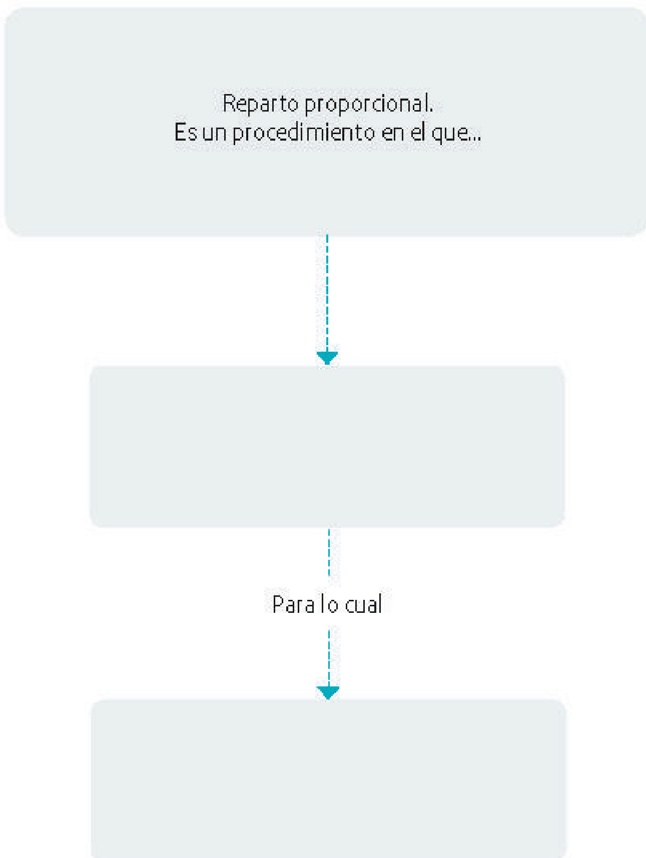
En retrospectiva

Formen parejas. Básense en la siguiente información para completar cada espacio vacío del esquema 10.1.

El procedimiento de reparto proporcional ocurre cuando:

- Se ha dividido una cantidad en varias partes, cada parte representa una razón de la cantidad original.
- Se quiere dividir otra cantidad en el mismo número de partes y que representen las mismas razones que se encontraron anteriormente.

Esquema 10.1 Reparto proporcional



¿Qué aprendí?

Trabajen individualmente.

1. Completen la tabla que representa una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de uva y el vino que produce un vitivinicultor.

Cantidad de uvas (kg)	Vino producido (L)
0.5	0.375
1	
3	
	5.250
	9

a) ¿Cuántos kilogramos de uva se requiere para producir 1 litro de vino? ________

b) ¿Cuántos litros de vino se producen con 2 kg de uvas? ________

2. Una hectárea es un terreno de 10 000 m^2 de área. Dos hectáreas de un viñedo de la Rioja, en España, produjeron 13 000 kg de uva.

a) ¿Cuántos kilogramos de uva produce una hectárea? ________

b) ¿Cuántos kilogramos de uva producen seis hectáreas? ________

c) ¿Cuántas hectáreas se requieren para producir 50 000 kg de uva? ________

3. Una parcela de una hectárea es propiedad de tres familias: la familia López es dueña de 3 500 metros cuadrados, la familia Rodríguez es dueña de 2 500 metros cuadrados y la familia Cruz es dueña de los 4 000 metros cuadrados restantes. La parcela se sembró de maíz y dio una cosecha de 12 000 kg. ¿Cuánto maíz le toca a cada familia? ________

4. Tres socios aportan \$4 000.00, \$6 000.00 y \$10 000.00 a un negocio. Al cabo de un año han ganado \$8 000.00. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si hacen un reparto directamente proporcional a los capitales aportados? ________

* Reúnanse con un compañero para revisar las respuestas de esta sección. Si hay discrepancias, intenten encontrar en dónde está el error. Si aún persiste la duda, reúnanse con otra pareja para dilucidar cuál es la respuesta correcta.

Expliquen los procedimientos que usaron para resolver los problemas; si el de alguno de ustedes fue distinto explíquenlo también. Si persiste alguna duda compártanla con su profesor(a) para que los oriente.

BLOQUE 2

S10 Proporcionalidad inversa

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Reúnanse en equipos de tres integrantes para analizar y resolver el problema.

En una construcción, tres trabajadores levantan un muro en 32 horas. Al supervisor de la obra le urge que terminen, así que decide contratar otros dos trabajadores que laboren al mismo ritmo de los otros tres para que todos juntos levanten un muro idéntico. ¿Cuánto tardarán en hacer esta tarea los cinco trabajadores? ____________

Sesión 1. Proporcionalidad inversa

α

Trabajen en parejas y efectúen las siguientes actividades.

1. Consideren la tabla 10.1. Analicen y discutan si existe alguna relación entre cada pareja de valores correspondientes.
   a) ¿Cuál es el área de un cuadrado con lados de 4 cm? ____________
   b) Completen la tabla 10.1.

Tabla 10.1 Proporciones de un cuadrado

Lado del cuadrado (cm)	Área (cm^2)
4	
8	
16	

   c) ¿Qué pasa con el área cuando aumenta la longitud del lado del cuadrado? ____________
   d) Si el lado aumenta al doble, ¿el área aumenta en la misma proporción? ____________
   e) ¿Es ésta una relación de proporcionalidad directa? ____________
   f) Expliquen su respuesta al inciso e. ____________

2. Para alimentar cinco vacas adultas, Saúl compró una carga de seis toneladas de alimento, la cual duró exactamente 20 días. Ahora adquirió 15 vacas adultas más, ¿para cuántos días le alcanzará una carga igual de alimento para todas sus vacas?
   a) Completen la tabla 10.2.

Tabla 10.2 Carga de alimento para vacas

Cantidad de vacas	1		5	20
Días que dura una carga de alimento de 6 toneladas		50	20	

b) Analicen cómo cambia cada una de las variables. Si aumenta el número de vacas y el alimento está fijo, ¿cómo varían los días que dura el alimento?

____

c) ¿Es ésta una relación de proporcionalidad directa? ____________________

3. En el restaurante de Pedro pagan la misma cantidad a todos los empleados por hora trabajada. Elsa trabajó 30 horas esta semana y le pagaron $1 500. ¿Cuánto gana Elsa por cada hora de trabajo? ____________________

____

a) Completen la tabla 10.3.

Tabla 10.3 Pago por horas trabajadas

Número de horas trabajadas	1		10	30
Pago en pesos		200		1500

b) Analicen cómo cambia cada una de las variables en el problema. ¿Encuentran alguna relación entre las variables? ¿Cómo varía el pago con relación a las horas trabajadas? ____________________

c) ¿Es ésta una relación de proporcionalidad directa? Justifiquen su respuesta.

____

____

Actividad

Trabajen en parejas.

4. A continuación se hacen afirmaciones acerca de las actividades anteriores. Complétenlas con las frases: “aumenta”, “disminuye”, “en la misma proporción”, “en otra proporción”.

a) En el problema de las áreas de cuadrado se ve que, cuando __________ la longitud de un lado, su área también __________. El aumento es __________.

b) En el problema de las vacas hay una cantidad fija de alimento. Cuando el número de vacas __________, la cantidad de días que dura el alimento __________. La disminución es __________ que el aumento en el número de vacas.

c) En el problema del pago por horas, cuando __________ el pago es porque se trabajó mayor número de horas y estos aumentos son __________.

5. Los ejercicios anteriores ilustran diferentes tipos de relaciones. Las relaciones de proporcionalidad directa se estudiaron en la secuencia anterior. En esta secuencia se van a estudiar otro tipo de relaciones, como la de las vacas y los días que dura una cierta cantidad de alimento, en las que al aumentar una variable la otra disminuye y si una aumenta *n* veces la otra disminuye *n* veces.

Las relaciones de proporcionalidad inversa cumplen que:

a) Cuando una variable aumenta la otra disminuye.

b) El aumento en una es en la misma proporción que la disminución en la otra.

6. Analicen el siguiente problema, completen la tabla 10.4 y verifiquen que se cumplen las propiedades *a* y *b*, esto es, si es una relación de proporcionalidad inversa.
   a) En una fábrica, un tanque tiene 4 llaves idénticas para vaciarse, pero las llaves funcionan por medio de válvulas eléctricas por lo que no siempre conviene abrir las 4, sólo cuando se requiere ganar tiempo. Dos llaves abiertas vacían el tanque completamente lleno en 9 horas. ¿En cuánto tiempo se vaciará si se abren las 4 llaves juntas?

Tabla 10.4 Tiempo para llenar un tanque dependiendo de las llaves abiertas

Número de llaves abiertas	1	2	3	4
Horas para vaciar el tanque		9		

Actividad

Sigan trabajando en parejas. Lean la información proporcionada y respondan las preguntas planteadas.

7. Inventen un problema de una relación de proporcionalidad inversa y uno de una relación que no sea de proporcionalidad inversa ni directa, y escríbanlos en su cuaderno.

* En sesión grupal, las parejas que aún tengan dudas sobre la respuesta correcta de alguna pregunta, expongan en el pizarrón cuál es la pregunta y cuáles son sus argumentaciones. Entre todo el grupo encuentren la respuesta correcta y argumenten por qué es así.

Cada pareja escriba en el pizarrón sus ejemplos de relaciones de proporcionalidad inversa y de relación que no es de proporcionalidad inversa. Todo el grupo analice los ejemplos y confirme que realmente sean ejemplos de lo que se solicitó.

Sesión 2. Propiedades de las relaciones de proporcionalidad inversa

Actividad

Trabajen en parejas y resuelvan las preguntas planteadas.

1. Martha prepara y vende mermelada para tener algunos ingresos extra en su hogar. Apenas terminó de hacer 15 litros de mermelada de zarzamora.
   a) ¿Cuántos frascos con capacidad de 250 ml puede llenar con esa mermelada?
   ____
   ____
   b) ¿Cuántos frascos con capacidad de 375 ml puede llenar con la misma mermelada? ____
   ____

c) Sonia le dijo que le compraría los 15 litros pero que ella misma los repartiría en 30 frascos muy bonitos que quiere regalar. ¿Cuál es la capacidad de los frascos de Sonia? ______

d) Completen la tabla 10.5 con los datos obtenidos.

Tabla 10.5 Capacidad y número de frascos de mermelada

Capacidad de los frascos en litros	0.250	0.375	0.500
Número de frascos que se pueden llenar con 15 litros de mermelada			

2. Analicen y completen las situaciones.
   a) Completen el enunciado que generaliza la propiedad que acaban de encontrar en la tabla anterior:
   En la tabla 10.5, el producto de un valor de capacidad de los frascos por su correspondiente valor de número de frascos es ______.
   b) Hagan algo similar en el caso de la tabla de las vacas y los días que dura el alimento. ¿Qué observan? ______
   c) Repitan lo que hicieron en los incisos a y b para el caso de las llaves y el tiempo que tardan en vaciar el tanque si éste está lleno. ¿Qué observan?

Si dos variables, o magnitudes, están relacionadas de modo que, al aumentar n veces la primera, su valor correspondiente disminuye n veces, se dice que esas magnitudes son inversamente proporcionales.

En un problema de proporcionalidad inversa la constante de proporcionalidad es el producto de cualesquiera dos valores correspondientes.

Actividad

Sigan trabajando en parejas.

3. Revisen y comparen sus respuestas a la pregunta de la sección *Una mirada previa*.
   a) ¿Qué tipo de relación hay entre las variables de ese problema? Expliquen. ______
   b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad del problema? ______

c) ¿Cuánto tardarán 10 trabajadores en levantar el muro? ______________________

____

d) ¿Cuántos trabajadores se requieren para terminar en 8 horas? ______________

____

En una tabla de proporcionalidad inversa el producto de dos valores correspondientes es una constante k. Al dividir k entre uno de los valores en la tabla, se obtiene el valor correspondiente de la otra variable.

El valor constante k se denomina **constante de proporcionalidad**. (Para no confundir con la constante de proporcionalidad, de las relaciones de proporcionalidad directa, en este libro se denominará constante de proporcionalidad inversa.)

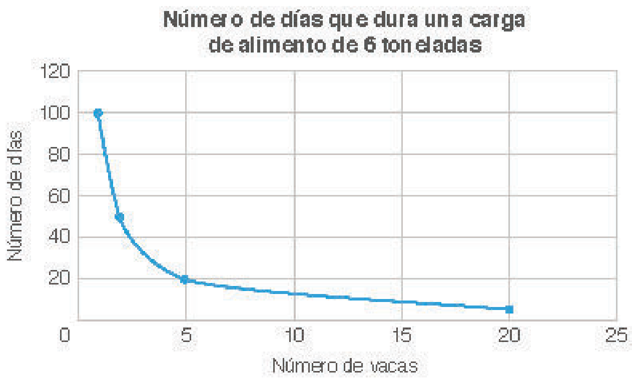
La relación que se acaba de enunciar se puede expresar en términos algebraicos. Si se llama x a una de las variables y y la otra, entonces $xy = k$.

Actividad

Sigan trabajando en parejas.

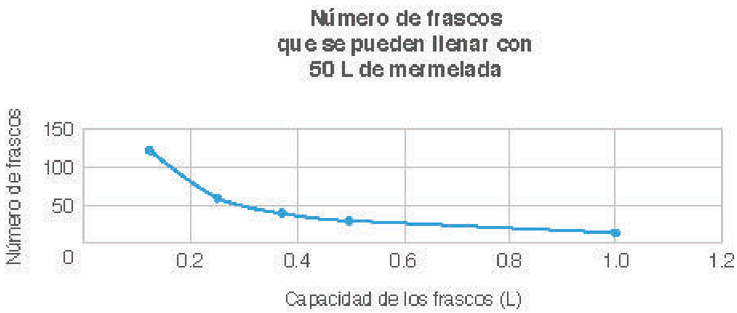
4. En una hoja de cálculo introduzcan los datos de las tablas 10.1 a 10.4 de esta secuencia, en cada caso usa la hoja para graficar los datos de la tabla, elijan una gráfica que una los puntos. Pueden aumentar algunos renglones para que quede mejor delineada, pero tengan cuidado de que, en la tabla que usen, los datos estén ordenados por alguna de las dos variables para que los puntos se unan de manera ordenada también. Después, analicen las gráficas que se presentan a continuación y compárenlas con las que ustedes elaboraron.

Gráfica 10.1 Datos de la tabla 10.1



Gráfica 10.2 Datos de la tabla 10.2

Gráfica 10.3 Datos de la tabla 10.3



Gráfica 10.4 Datos de la tabla 10.4

a) ¿Qué observan en las gráficas? ______

* En sesión grupal, equipos voluntarios copien las gráficas que obtuvieron; dividan en cuatro partes el pizarrón para que queden dibujadas todas. Después, otros equipos voluntarios expongan sus respuestas a la pregunta, y en grupo verifiquen y elijan las mejores redacciones de los enunciados que expresan la misma idea.

Las parejas que aún tengan dudas, sobre la respuesta correcta de alguna pregunta, expongan en el pizarrón cuál es la pregunta y cuáles son sus argumentaciones. Entre todo el grupo encuentren la respuesta correcta y argumenten por qué es así.

Sesión 3. Problemas sobre relaciones de proporcionalidad inversa

Problemas

α

Trabajen individualmente. Escriban las operaciones pertinentes y los resultados.

1. Cinco niños se ponen de acuerdo para comprar un balón de voleibol. Cada uno paga $24.00. El lunes cuando llegan a la escuela otros niños quieren cooperar para el balón.
   a) ¿Cuánto costó el balón? ______
   b) Si hay más niños, la cooperación individual ¿aumenta o disminuye? ______
   c) El lunes, al llegar a la escuela, hay siete niños más que también quieren cooperar para el balón de voleibol. ¿Cuánto debe ser la cooperación entonces? ______
   d) Si el número de niños se triplica, ¿cuántos niños serían y cuánto pagarían? ______

Problemas

σ

Resuelvan el problema. En cada caso escriban las operaciones y el resultado.

2. En la secundaria hubo una carrera de 200 metros en la que participaron cinco alumnos. La maestra de deportes tomó el tiempo que tardó cada uno en recorrer dicha distancia. Los resultados que obtuvo se muestran en la tabla 10.6. ¿Cuál fue la velocidad de cada alumno? Organicen la información.

Tabla 10.5 Tiempo y velocidad de recorrido

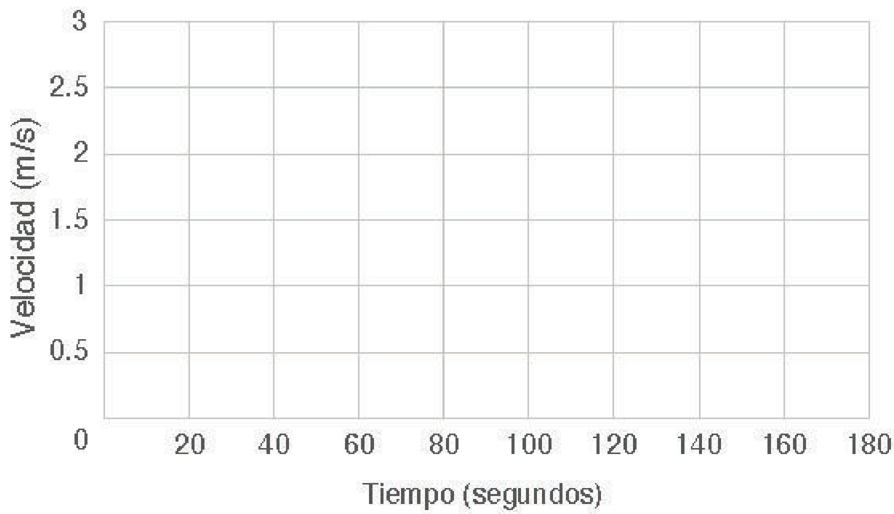
Alumno	Tiempo en segundos	Velocidad en m/s
A	100	
B	160	
C	125	
D	80	
E	90	

a) ¿Cuál niño corrió más rápido y cómo lo saben? ____________________

b) La velocidad, en metros sobre segundo, es el tiempo promedio, en segundos, en el que se recorre 1 m. ¿Cuál es la velocidad de B en m/s? ____________

c) ¿La velocidad de C va a ser mayor o menor que la de B y cómo lo saben? ____
____

d) En la cuadrícula siguiente grafiquen esta relación, usen la variable tiempo para el eje horizontal.



3. Analicen el problema 1. Éste plantea la relación entre el número de niños y la cooperación que deben dar para un balón de voleibol.

a) Completen las tres columnas de en medio de la tabla 10.7 con los datos de las respuestas obtenidas en los incisos **a**, **c** y **d**, respectivamente.

Tabla 10.7 Cooperación para comprar un balón

Número de niños	1	5	12	15	24
Cooperación en pesos					

b) ¿Cómo se obtiene la constante de proporcionalidad en este problema? ____
____

c) ¿Cuánto vale y qué representa la constante de proporcionalidad del problema? ____________________________________
____

d) ¿Cuánto le hubiera costado el balón a un solo niño? ________________
____

e) ¿Cuántos niños se necesitan para que la cooperación sea de $5? __________
____

f) Completen la primera columna de la tabla 10.6 con los datos de la pregunta del inciso d anterior.

g) Completen la última columna de la misma tabla con los datos de la pregunta del inciso e.

h) ¿La relación en la tabla es de proporcionalidad inversa? Para su respuesta, imaginen que envían un mensaje a un compañero o compañera para explicarle todo el problema.

____

____

4. Analicen el problema 2. Éste trata la relación entre el tiempo y la velocidad de recorrido de una distancia fija, en este caso de 200 metros.

a) ¿Cómo se obtiene la constante de proporcionalidad en este problema? _______________

b) ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? _______________

c) ¿Cuánto tardaría en correr 200 metros un niño que corre a 1 m/s? _______________

d) ¿A qué velocidad hay que correr para tardar 50 segundos en recorrer los 200 metros? _______________

e) ¿La relación en la tabla 10.5 es de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos? Usen los datos de la tabla para dar un ejemplo que justifique sus respuesta. _______________

* Reúnanse con otra pareja para revisar los resultados que obtuvieron en esta sesión. Tomen nota de las preguntas en las que no logran ponerse de acuerdo y hagan un resumen de los argumentos que cada uno ha dado para explicar su respuesta. En la sesión grupal, cuando otros equipos expongan sus resultados, se podrá discernir cuál es el resultado o argumento correcto.

Autorregulación

Retomando una mirada previa

Considerando todas las actividades y problemas de esta secuencia, respondan las siguientes preguntas.

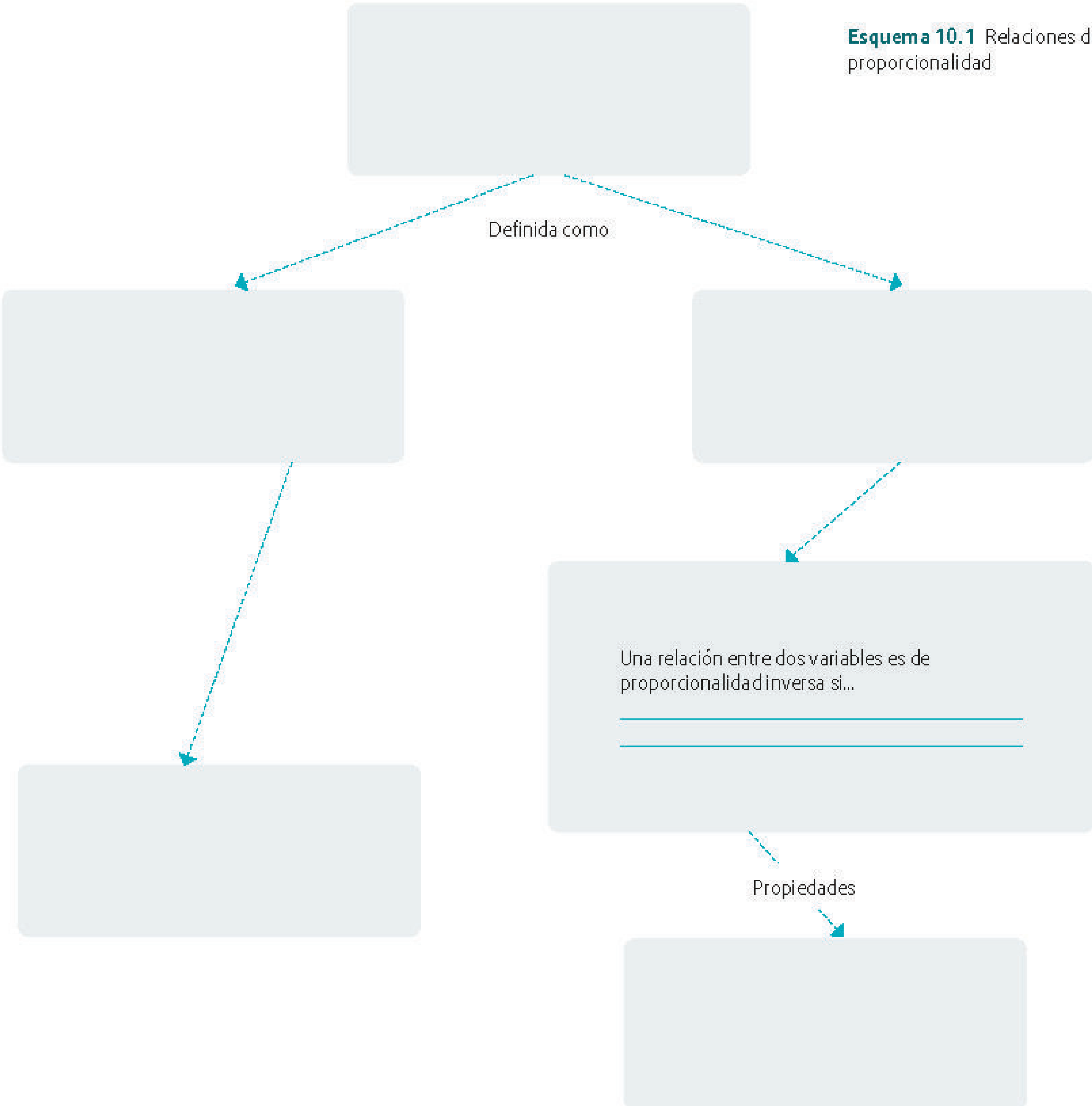
1. Después de efectuar las sesiones 1 a 3, ¿consideran que ahora es más fácil, igual o más difícil responder la actividad planteada en esta sesión? _______________
2. ¿Prefieren efectuar las actividades solos o con un compañero? _______________
3. Escriban algún error que haya cometido y cómo lo corrigieron. Si no tuvieron errores, escriban un conocimiento que adquirieron en esta secuencia. _______________

En retrospectiva

Coloca cada contexto o texto de la siguiente lista en los rectángulos vacíos del esquema que se presenta a continuación, de modo que sea coherente, es decir, que exprese correctamente las relaciones entre conceptos.

- Una relación entre dos variables.
- Al aumentar una k veces, la otra disminuye k veces.
- Proporcionalidad directa.
- En una tabla, el producto de dos valores correspondientes es una constante k.
- Proporcionalidad inversa.
- Al dividir k entre uno de los valores en la tabla se obtiene su valor correspondiente de la otra variable.

Esquema 10.1 Relaciones de proporcionalidad



¿Qué aprendí?

Trabajen individualmente.

1. En la tabla 10.7, clasifiquen las relaciones mostradas en relaciones de proporcionalidad directa, inversa o ninguna de las dos y justifiquen su respuesta en cada caso.

Tabla 10.7 Relaciones de proporcionalidad

a) El número de vacas y la cantidad de alimento que consumen, entre todas, en un día.	
b) Lo que se compra por cierto tipo de manzanas y lo que se paga por ellas.	
c) La estatura de una persona y su masa.	
d) El número de vacas y los días que dura una cierta cantidad fija de alimento.	
e) El precio de un kilogramo de manzanas y la cantidad de manzanas que se compran con una cantidad fija de dinero.	

Resuelvan los siguientes problemas. En cada caso escriban operaciones y resultados.

2. En temporada regular, cuatro camareras arreglan todos los cuartos en cuatro horas.
   a) ¿Cuántas camareras, que trabajan al mismo ritmo que las cuatro mencionadas, se requieren para arreglar todos los cuartos en dos horas? ______
   b) En temporada alta se contratan 10 camareras en total. ¿Cuánto tiempo se tardan en arreglar todos los cuartos? ______
   c) ¿Cuánto tiempo tardarían dos camareras en arreglar todos los cuartos si ambas trabajan al mismo ritmo que las de los otros incisos? ______

3. Un autobús tarda una hora en acabar su trayecto a una velocidad de 60 km/h.
   a) Si aumenta la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto tardará en terminar su trayecto? ______
   b) Si se quiere que el autobús acabe su trayecto en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿A qué velocidad debe ir? ______
   c) Si el autobús disminuye su velocidad a 50 km/h. ¿Cuánto tardará en recorrer el mismo trayecto? ______

* Revisen sus respuestas. Primero verifiquen, con su calculadora, las operaciones que realizaron y corrijan lo que sea necesario. Luego, reúnanse con un compañero y comparen sus resultados.

Busquen información en su libro para resolver dudas acerca de las definiciones de proporcionalidad directa e inversa, y en sesión grupal expongan sus dudas para resolverlas entre todos.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

BLOQUE 2

S11

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Formen parejas y resuelvan el problema siguiente.

1. Se quiere saber cuánto miden el largo y el ancho de un terreno rectangular del que se tiene la siguiente información. El largo es el doble del ancho; su perímetro mide 102 m. Observen la figura 11.1 y respondan.

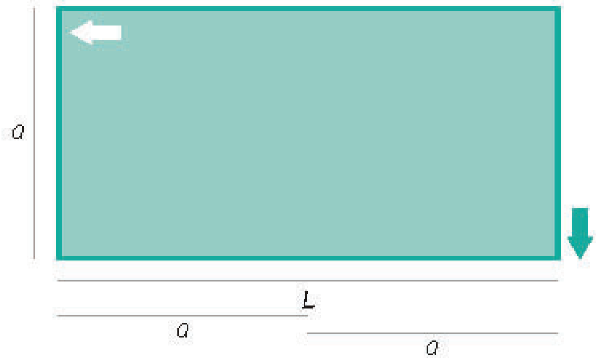


Figura 11.1 Rectángulo de largo L y ancho a

a) ¿Hay una correspondencia entre la imagen y los datos del problema? Discutan al menos dos argumentos que justifiquen la elección (sí o no) de su respuesta.

b) Dado que el perímetro vale 102 m, ¿cuánto vale el ancho del rectángulo? ______

____

c) ¿Cuánto vale la longitud del rectángulo? ______________________________

d) Cuando comenzaron a leer el problema, ¿el largo y el ancho del problema eran números conocidos, o parte de los datos incluidos en el planteamiento del problema? ______________________________

e) ¿Ayuda a resolver el problema tener una imagen o representación visual que traduzca el enunciado del problema? Justifiquen su respuesta.

* Hagan un reporte de todo lo elaborado, y entréguenlo a su maestro para que él organice que varios de los equipos pasen al pizarrón a explicar lo que hicieron, ya sea que hayan resuelto, o no, completamente el problema.

Formulación algebraica del problema

Se llama ***formulación del problema*** al inicio de la resolución algebraica de un problema de matemáticas planteado en lenguaje natural, y consiste en traducir expresiones en lenguaje natural a expresiones o relaciones entre los datos, ahora en lenguaje algebraico, utilizando para ello literales o **incógnitas**.

Las ***ecuaciones*** (ver *Matemáticas 1*, Colección Identidades, Editorial Patria, 2018, p. 177) son resultado de la formulación del problema; y sus ***soluciones*** son números que, al sustituirlos por las incógnitas en la ecuación, hacen cierta la igualdad expresada por la ecuación.

En otras palabras

Las **incógnitas** son valores numéricos desconocidos en un problema y se suelen representar con letras del alfabeto; cuando hay dos incógnitas distintas usualmente se usan las letras x, y.

2. Continúen trabajando en parejas para responder las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuáles son las dos incógnitas que aparecen en el primer problema de esta secuencia? ______
   b) ¿Con qué letras se representó algebraicamente a las incógnitas? ______
   c) ¿Cuáles son las dos ecuaciones que representan los datos del problema? ______
   d) ¿Cuáles son las características de tales ecuaciones? ______

Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Se llama **ecuación de primer grado con dos incógnitas** a la representación simbólica de la igualdad entre dos cantidades o miembros de la ecuación. Estas ecuaciones se caracterizan por incluir números conocidos y dos incógnitas distintas cuyo exponente no es mayor que uno. Algunos ejemplos son: $2x + 3y = 4$, $5x - 2y = 1$, $y = 2x - 7$.

Sesión 1. Identificación de incógnitas y formulación de ecuaciones en un sistema

Problemas

α

Trabajen en parejas. Lean cada problema y traten de encontrar las dos ecuaciones que se obtienen a partir de los datos del problema.

1. El precio de tres caramelos y dos chocolates es de \$28.00 mientras que el precio de cuatro caramelos y un chocolate es de \$24.00.
   a) Si llaman x al precio de un caramelo, y al precio de un chocolate. ¿Cuáles ecuaciones se pueden obtener a partir de los datos del problema? ______
2. Encuentren dos números cuya suma sea 34 y su diferencia 10.
   a) Llamen x a uno de los números, y al otro número. ¿Cuáles ecuaciones se pueden obtener a partir de los datos del problema? ______
3. Las entradas para una obra de teatro valen \$75.00 para los adultos y \$35.00 para los niños. Se sabe que asistieron 120 personas y la recaudación fue de \$8000.
   a) Si x es el número de adultos que asistió al teatro y y el número de niños, ¿qué ecuaciones se pueden plantear a partir de los datos del problema? ______
4. Cuatro veces la edad de Juan más tres veces la edad de Pedro da como resultado 45; pero si al doble de la edad de Juan se le resta la edad de Pedro da como resultado 15.
   a) Si llaman x a la edad de Juan y y a la edad de Pedro, ¿qué ecuaciones se obtienen a partir de los datos del problema? ______

5. El perímetro de un rectángulo es de 60 metros. Si el largo aumenta tres metros y el ancho disminuye tres metros, el perímetro sigue siendo el mismo.

   a) Llamen x al largo del rectángulo y y al ancho, ¿qué ecuaciones se pueden obtener a partir de los datos del problema? ______________________________

   ____

   ____

¿Qué es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas?

Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** está formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Las dos ecuaciones tienen las mismas incógnitas, y cada ecuación se obtiene a partir de los datos que aparecen en un mismo problema.

Las **soluciones de las ecuaciones del sistema** están formadas por **dos números** que al ser sustituidos en las dos ecuaciones del sistema (en el lugar de las incógnitas correspondientes) hacen que se cumplan o que se satisfagan las dos igualdades, representadas por las ecuaciones del caso.

Actividad

Continúen trabajando en parejas.

6. Asocien cada uno de los sistemas de ecuaciones que aparecen en la segunda columna con el enunciado de los problemas 1 a 5 anteriores. Además, asocien los números de la tercera columna con las soluciones del sistema correspondiente. Tengan en cuenta que las soluciones de una ecuación son números que, al ser sustituidos en el lugar de las incógnitas, hacen que sea cierta o que se satisfaga la igualdad.

Problema 1	$\begin{aligned} x+y &= 34 \\ x-y &= 10 \end{aligned}$	$x = 1,\ y = 29$
Problema 2	$\begin{aligned} 2x+2y &= 60 \\ 2(x+3)+2(y-3) &= 60 \end{aligned}$	$x = 9,\ y = 3$
Problema 3	$\begin{aligned} 3x+2y &= 28 \\ 4x+y &= 24 \end{aligned}$	$x = 4,\ y = 8$
Problema 4	$\begin{aligned} 75x+35y &= 8000 \\ x+y &= 120 \end{aligned}$	$x = 22,\ y = 12$
Problema 5	$\begin{aligned} 4x+3y &= 45 \\ 2x-y &= 15 \end{aligned}$	$x = 95,\ y = 25$

7. Relacionen con una línea las soluciones (columna derecha) con el sistema de ecuaciones correspondiente (columna izquierda). Recuerden que las soluciones de una ecuación son números que, al ser sustituidos en el lugar de las incógnitas, hacen que sea cierta o que se satisfaga la igualdad.

$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 3y &= 10 \end{aligned}$	$x = -1 \quad y = \frac{1}{2}$
$\begin{aligned} 8x + 9y &= 42 \\ 2x + 3y &= 12 \end{aligned}$	$x = -1, \; y = 5$
$\begin{aligned} 7x - 5y &= -9 \\ -4x + 10y &= 48 \end{aligned}$	$x = 3, \; y = 6$
$\begin{aligned} 4x - 2y &= -5 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$	$x = 3, \; y = 2$
	$x = 2, \; y = 4$

Una pareja de números x_0, y_0 son solución de un sistema de ecuaciones si simultáneamente son solución para ambas ecuaciones. Es decir, se verifica la igualdad cuando se sustituyen los valores x_0, y_0 en los lugares de la x y de la y en cada una de las dos ecuaciones.

Problemas

Trabajen en parejas para llevar a cabo lo que se solicita.

8. Analicen los problemas de la tabla 11.1 e indiquen cuáles son las incógnitas y escriban cuáles son las ecuaciones que forman cada sistema.

Tabla 11.1 Identificación de incógnitas y formulación de ecuaciones

Problema	Incógnitas	Ecuaciones
a) Para hacer una blusa chica y una grande se necesita un metro y medio de tela, mientras que para hacer cuatro blusas chicas y dos grandes se necesitan cuatro metros de tela. ¿Qué cantidad de tela se necesita para cada tipo de blusa?		
b) Abel compró cinco cuadernos, unas de marca A de costo \$35.00 cada uno, y otras de marca B de \$45.00 cada una. Como pagó en total \$310.00, ¿cuántos cuadernos de cada tipo compró?		
c) La suma de dos números es 18 y su diferencia es 6. ¿Cuáles son esos números?		

d) Luis pagó $264.00 por cinco fotos tamaño infantil y tres fotos tamaño título, en tanto que Fernando pagó $266.00 por cuatro tamaño título y tres tamaño infantil. ¿Cuánto cuesta cada tipo de foto?		
e) Para una actividad escolar la maestra Elsa pagó $98.00 por siete piezas de papel cartoncillo y nueve piezas de papel lustre, en tanto que la maestra Lucía pagó $55.00 por cuatro de cartoncillo y cinco de lustre. ¿Cuánto cuesta cada pieza de papel?		

* Reúnanse con sus compañeros y comparen los procedimientos que llevaron a cabo, así como los resultados que obtuvieron a lo largo de la sesión. Si no coinciden, argumenten y lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

Sesión 2. Representación cartesiana de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y la solución gráfica del sistema

Actividad α

Trabajen en parejas y resuelvan.

1. Un recipiente tiene agua que alcanza una altura de 10 cm. Una llave le suministra agua y hace crecer el nivel en el recipiente a razón de 2.5 centímetros por segundo (cm/s). Otro recipiente tiene cierta cantidad de agua a una altura de 35 cm. En el mismo instante que el primer recipiente comienza a recibir agua, el segundo comienza a vaciarse a razón de 3.75 cm/s. ¿En qué momento los dos recipientes tienen el mismo nivel?

   a) Para representar la situación del llenado del recipiente 1, y la situación del vaciado del recipiente 2 (ambas situaciones se muestran en la figura 11.2). ¿cómo utilizarían el plano cartesiano de la figura 11.2? ______

   b) ¿Cómo construirían la gráfica de las dos situaciones mencionadas en el inciso a? ¿Les ayudaría en la resolución del problema? ______

   c) ¿Qué es lo que se pregunta o se pide resolver en el problema? ______

   d) ¿Cuál es la altura que alcanza el agua en el momento en que los dos recipientes tienen el mismo nivel? ______

   e) ¿Notan que en el enunciado del problema hay dos situaciones distintas y que el instante en que los dos recipientes tienen el mismo nivel también determina una misma altura para los recipientes?

2. Hagan un reporte en su cuaderno. Describan el resultado más relevante de lo que hicieron en el punto 1. Incluyan en su reporte la representación gráfica de las dos situaciones que se describen en el problema, para lo que se utilizaron los ejes de coordenadas.

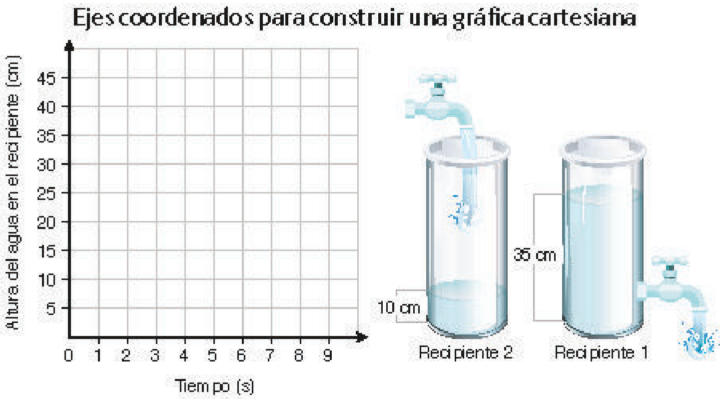


Figura 11.2 Llenado y vaciado de dos recipientes

Representación cartesiana de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Se llama **representación cartesiana o gráfica del sistema** a la **construcción**, en un plano cartesiano, **de dos rectas** que modelan dos situaciones presentes en un problema, las cuales pueden ser coincidentes, o no, en un momento dado.

3. Consideren las relaciones de la página 131 donde se establecieron problemas, sistemas de dos ecuaciones, los números y las soluciones de ambas ecuaciones en el sistema.

   a) Construyan una gráfica cartesiana para los sistemas de ecuaciones de la página 131, utilicen un mismo plano cartesiano para el trazado de la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema.

   b) Para recordar como trazar la gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, consulten el tema de "funciones lineales y ecuaciones", y el de "funciones afines", en el libro *Matemáticas 1*, colección Identidades, Editorial Patria, 2018, p. 189-192. ¿Las ecuaciones asociadas a las funciones lineales y afines son ecuaciones de primer grado con dos incógnitas? ¿Por qué?

   ____

   ____

   c) Observen la gráfica 11.1, en donde se trazó la gráfica de la ecuación: $3x - y = 1$. Construyan, utilizando la gráfica 11.1, la gráfica de la ecuación $2x + y = 2$. El trazado de las dos rectas en un mismo plano cartesiano es la representación gráfica del sistema de ecuaciones:

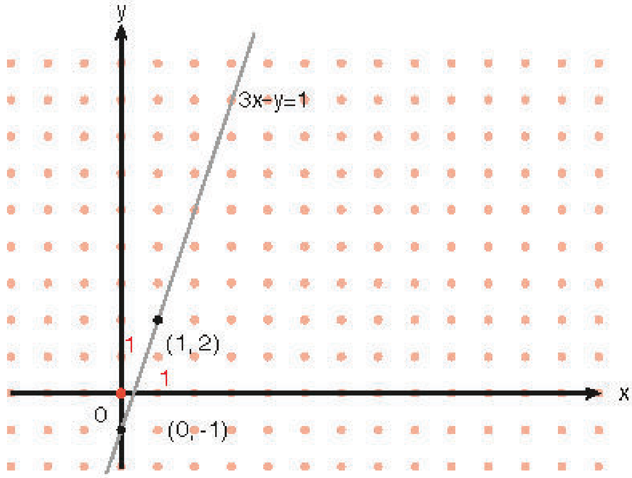
   - $3x - y = 1$
   - $2x + y = 2$

En otras palabras

Una **gráfica cartesiana de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** se construye trazando, en un mismo plano cartesiano, la gráfica de cada una de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que forman parte del sistema.

Las **soluciones del sistema** están constituidas por los **puntos de intersección de las dos rectas** asociadas a las dos ecuaciones del sistema.

Gráfica 11.1 Representación gráfica de la ecuación $3x - y = 1$



En otras palabras

Dos características son importantes para que un problema sea modelado por un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

a) Que en el problema haya dos situaciones a representar.

b) Que haya dos valores numéricos a encontrar, que coincidan en las dos situaciones en un momento dado.

d) ¿Cuál es el punto de intersección de las dos rectas trazadas? ______

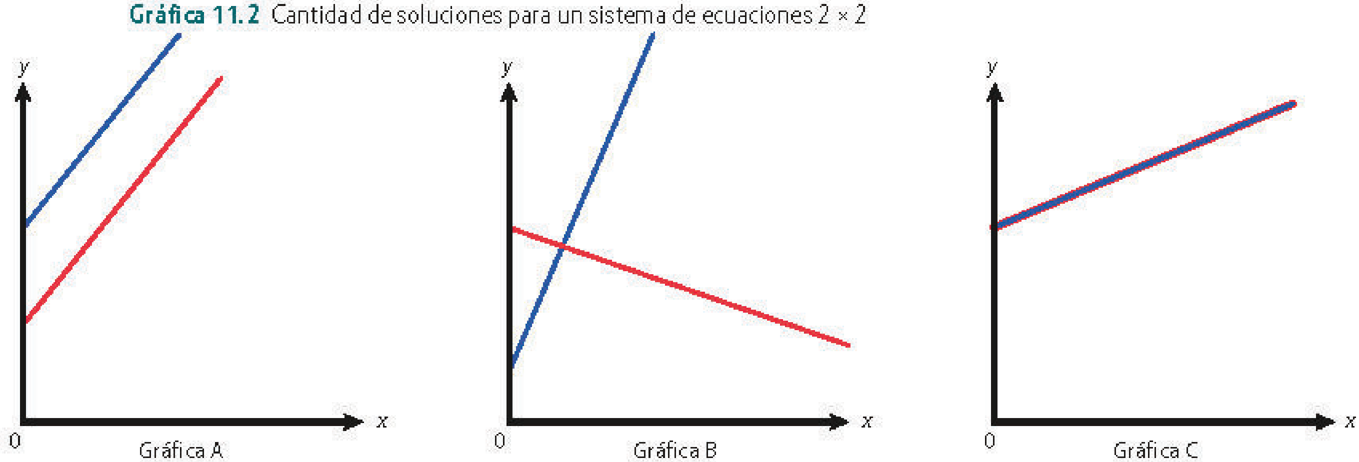
e) ¿Qué sucede al sustituir los valores encontrados en cada una de las dos ecuaciones del sistema? ______

f) Los valores encontrados, ¿son soluciones de las dos ecuaciones del sistema? ¿Por qué? ______

g) Hagan un reporte de lo que hicieron en los incisos anteriores. Entreguen las representaciones graficas de los sistemas anteriores. También es necesario agregar al pie de la representación grafica de cada uno de los sistemas de ecuaciones reportados en el inciso **a**, los valores de las coordenadas del punto de intersección de cada par de rectas asociadas al sistema.

4. Analicen las siguientes gráficas. Determinen cuál corresponde a un sistema 2×2 que tiene una solución, cuál a un sistema que no tiene solución y cuál a uno que tiene infinidad de soluciones.

Gráfica 11.2 Cantidad de soluciones para un sistema de ecuaciones 2×2



Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Si encuentran diferencias, expliquen cuales fueron sus argumentos para relacionar las gráficas con la cantidad de soluciones que corresponden a un sistema 2×2.

Finalmente, en sesión de trabajo grupal presenten todo lo elaborado. Y también verifiquen en clase que las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas en cada sistema proporcionan una solución conjunta para ambas ecuaciones en el sistema.

5. Asocien cada uno de los sistemas de ecuaciones con una de las opciones de representación gráfica que se enlistan en la columna derecha.

Sistema de ecuaciones	Representación gráfica
a) $\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -x + 3y &= 5 \end{aligned}$	No hubo dos rectas, sólo una
b) $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$	Las rectas se intersecaron una sola vez
c) $\begin{aligned} 2x - 5y &= -10 \\ -4x + 10y &= 20 \end{aligned}$	Las rectas se intersecaron una sola vez
d) $\begin{aligned} 4x - 2y &= -3 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$	Las rectas resultaron ser paralelas, con diferente ordenada al origen
e) $\begin{aligned} 4x \quad y &= 9 \\ 2x + 3y &= 12 \end{aligned}$	Las rectas se intersecaron una sola vez

f) Resalten o marquen con amarillo los tres casos de sistemas de ecuaciones (enlistados arriba, en la columna de la derecha) que fueron asociados a una representación gráfica de dos rectas que se intersecan una sola vez, y determinen las coordenadas del punto de intersección.

g) Para cada uno de los tres casos de sistemas de ecuaciones resaltados en amarillo, verifiquen que los valores que encontraron en el inciso a, son soluciones del par de ecuaciones en el sistema correspondiente (ver definición de soluciones de ecuaciones en un sistema, sesión 1 de esta secuencia).

h) Piensen si es posible obtener una regla general que describa las diferentes opciones de la posición de las rectas asociadas a un sistema de ecuaciones. ¿Cuál sería esa regla? Escriban la regla con sus propias palabras.__________

____

____

Trabajen con la misma pareja con la que trabajaron la Actividad 1 de esta sesión.

6. En la figura 11.3 se muestran dos recipientes con cierta cantidad de agua. A partir de un momento uno de ellos comienza a llenarse y el otro comienza a vaciarse. En el plano cartesiano se muestran las rectas que representan de manera gráfica las relaciones del tiempo transcurrido contra la altura del nivel del recipiente.

a) ¿Cuál de las rectas corresponde al llenado del primer recipiente y cuál al vaciado del segundo? ______

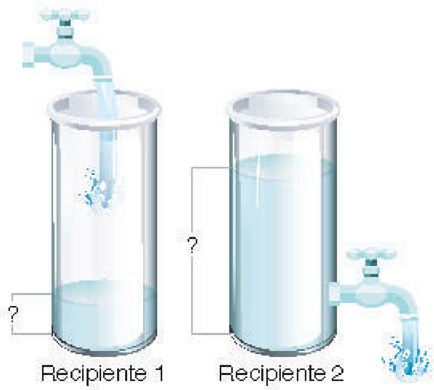
b) Determinen la altura del agua tanto en el primer recipiente como en el segundo cuando comienza el llenado. ______

c) Con base en la gráfica del primer recipiente, determinen la razón en que se llena; es decir, respondan cuántos centímetros sube o baja el nivel por segundo. (Observen que cuando baja dicha razón es negativa.) ______

______

d) Comprueben en qué momento ambos recipientes registran la misma altura en el nivel del agua y cuál es esa altura. ¿A qué punto de la gráfica corresponde ese momento? ______

e) Encuentren la razón de vaciado del segundo recipiente (figura 11.3). En este caso la razón es el cociente que resulta de dividir la altura del nivel del agua entre el tiempo en que esa altura se registra. ______



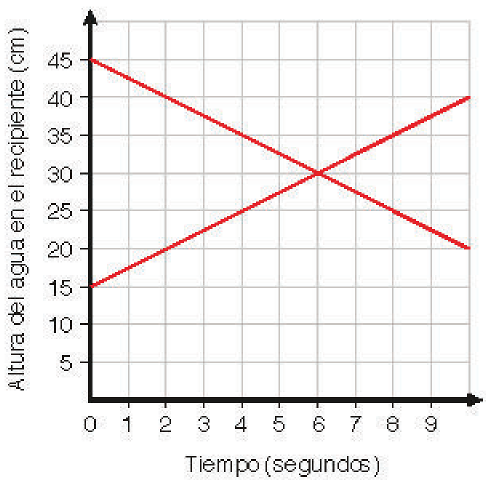


Figura 11.3 Representación gráfica del llenado y del vaciado de dos recipientes

7. Analicen los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Cuáles representan las relaciones entre la altura y el tiempo de llenado de los recipientes del problema enunciado al inicio de la actividad 1 de esta sesión?

a) $\begin{aligned} -\frac{5}{2}x + y &= 45 \\ -\frac{5}{2}x + y &= 15 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} \frac{5}{2}x + y &= 45 \\ -\frac{1}{2}x + y &= 15 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + y &= 45 \\ -2x + y &= 15 \end{aligned}$

d) Otro: ______

______

8. Resuelvan individualmente.

En la tabla 11.2 se presenta una lista de enunciados. En la columna derecha escriban un número del 1 al 5 para calificar el grado en que están de acuerdo con cada uno, donde 1 significa "no estoy de acuerdo en absoluto" y el grado aumenta hasta llegar a 5 que significa "estoy totalmente de acuerdo".

Tabla 11.2 Calificación personal de las actividades efectuadas

Enunciado	Calificación (de 1 a 5)
1. En las sesiones de trabajo sobre sistemas de ecuaciones todo lo que vimos me pareció nuevo.	
2. En estas sesiones de matemáticas me di cuenta de que usamos conocimientos que aprendí en el curso de primer grado o en una secuencia anterior.	
3. En estas sesiones pude recuperar todo lo que había aprendido de matemáticas en grados anteriores.	
4. No recuerdo nunca nada de lo que aprendí de matemáticas de una clase a otra.	
5. Recuerdo mejor lo que entendí bien o con lo que fui capaz de trabajar de una clase a otra.	

Sesión 3. Métodos algebraicos de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Actividad

Trabajen en parejas para llevar a cabo lo que se solicita.

1. Analicen cada sistema de ecuaciones y el par de rectas trazadas en cada uno de los planos cartesianos que se presentan a continuación.

Sistemas de ecuaciones

i) $\begin{aligned} 3x \quad y &= 1 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$

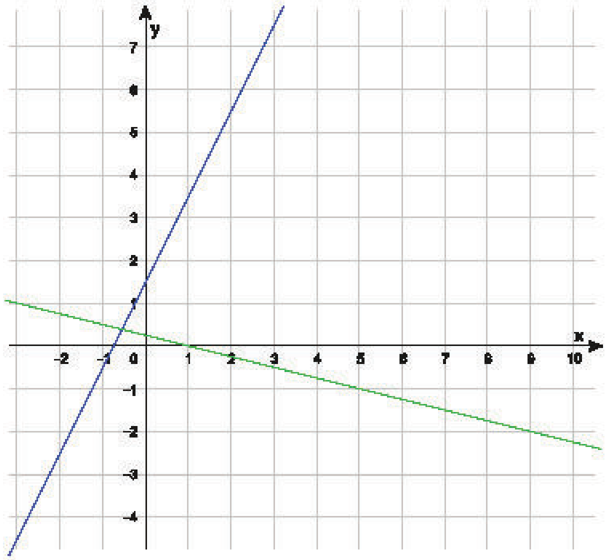
ii) $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$

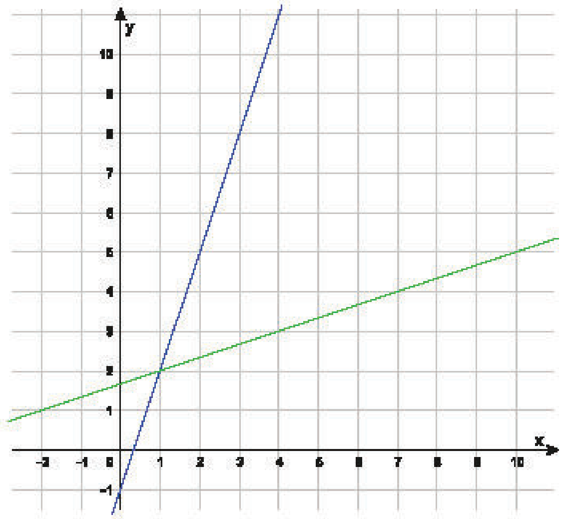
iii) $\begin{aligned} 2x - 5y &= -10 \\ -4x + 10y &= 20 \end{aligned}$

iv) $\begin{aligned} 4x - 2y &= -3 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$

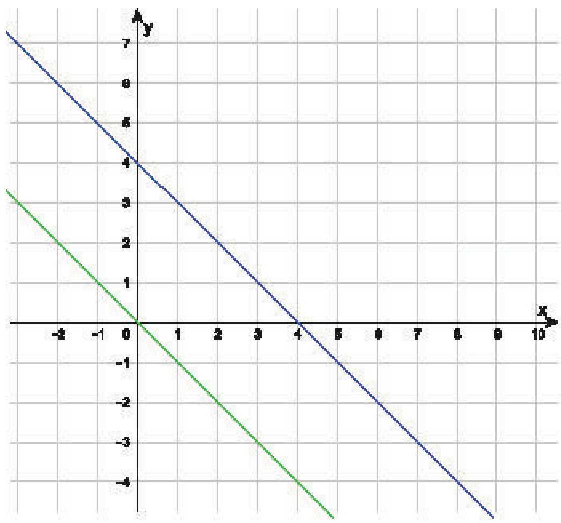
v) $\begin{aligned} 4x - y &= 9 \\ -2x + 3y &= 12 \end{aligned}$

a) Escriban debajo de cada plano, la letra del inciso del sistema de ecuaciones que esté representado en el mismo.

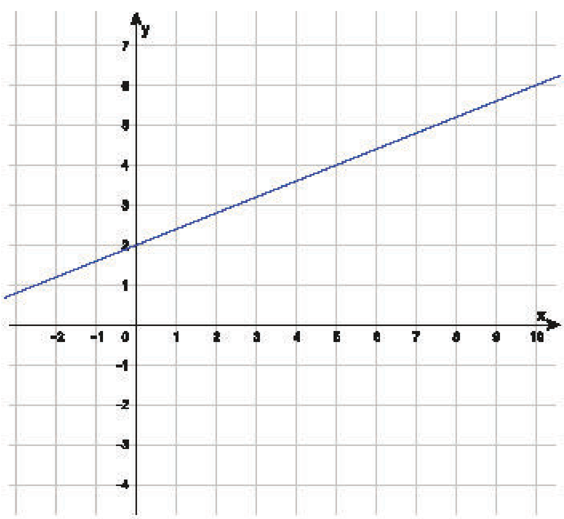


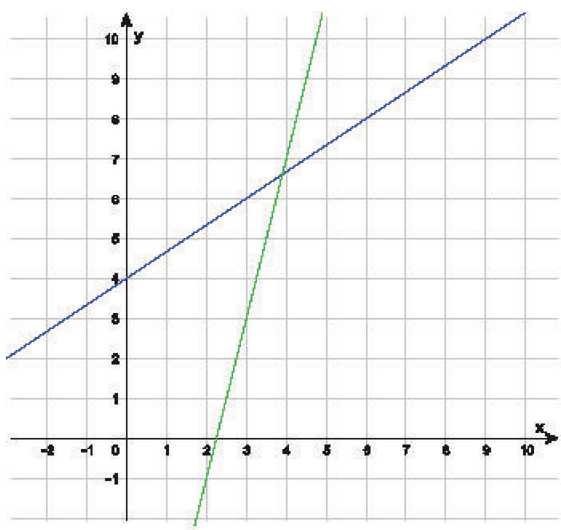


b) Digan con sus propias palabras cuál fue el criterio que siguieron para determinar que rectas en el plano cartesiano son las que corresponden al sistema de ecuaciones asociado.



c) Noten que, en cada una de las gráficas dadas, para cada recta trazada hay una ecuación indicada. ¿Cuál es la relación entre las ecuaciones que aparecen en las gráficas, y las ecuaciones tal y como aparecen en el sistema que les corresponde?





2. Continúen trabajando en parejas y lleven a cabo lo que se solicita.

a) Consideren el sistema de ecuaciones que aparece en el inciso (iv) de la actividad 1: $\begin{matrix} 4x-2y & =-3 \\ x+4y & =1 \end{matrix}$. ¿Encontraron que el plano cartesiano asociado a este sistema es el que aparece en primer término en esa actividad? ______

______

b) ¿Cuál es la relación entre las ecuaciones $2x+\frac{3}{2}=y$, $y=\frac{(1-x)}{4}$ con las del sistema: $\begin{matrix} 4x-2y & =-3 \\ x+4y & =1 \end{matrix}$? ______

c) ¿Es posible obtener a partir de la ecuación $4x-2y=-3$, la ecuación $2x+\frac{3}{2}=y$? ¿Cómo se pasa de la ecuación $x+4y=1$ a la ecuación $y=\frac{(1-x)}{4}$?

______

______

d) Escriban con sus propias palabras cómo pasar de las dos ecuaciones que aparecen en el sistema de ecuaciones del inciso i) $\begin{matrix} 3x-y=1 \\ -x+3y=5 \end{matrix}$, a las ecuaciones $3x-1=y$, $\frac{(-x-5)}{3}=y$. ______

______

e) Realicen lo mismo que en el inciso anterior, en el caso del sistema del inciso v) $\begin{matrix} 4x-y=9 \\ -2x+3y=12 \end{matrix}$ y las ecuaciones $4x-9=y$, y $y=4+\frac{2}{3}x$. ______

3. En cada uno de los casos i), iv) y v) de la actividad 1, encuentren los valores (x, y) que resuelven el sistema, procediendo de la manera siguiente.

a) Establezcan una igualdad entre las expresiones de las parejas de ecuaciones que aparecen en los planos cartesianos anteriores, y también resuelvan la ecuación de primer grado que de ahí resulta. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones que aparecen en el segundo plano cartesiano $3x-1=y$, $\frac{(-x-5)}{3}=y$.

Al establecer una igualdad entre ellas, se obtiene: $3x-1=\frac{-x-5}{3}$, de donde $x=-\frac{1}{5}$. Justifiquen. ______

______

b) Procedan a igualar, ahora en los casos de las ecuaciones en el primer plano, $2x+\frac{3}{2}=y$, $y=\frac{(1-x)}{4}$. Y también en el caso del último plano, $4x-9=y$, $y=4+\frac{2}{3}x$

c) Finalmente substituyan el valor x, encontrado a partir de igualar, en cualquiera de las dos ecuaciones del tipo $y=mx+b$ que conforman el sistema. Esto conducirá al valor de y, la otra incógnita del sistema. Por ejemplo, en el caso de las ecuaciones $3x-1=y$, $\frac{(-x-5)}{3}=y$, se obtuvo $x=-\frac{1}{5}$ (ver inciso a). Al substituir este valor en la ecuación $3x-1=y$, se obtiene $y=-\frac{8}{5}$. Justifiquen. ______

______

d) ¿Los valores $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ son las coordenadas del punto de intersección de las rectas trazadas en el segundo plano cartesiano?

e) Efectúen el mismo procedimiento que se indica en el inciso c para encontrar el valor de la incógnita y. Utilicen los valores x que encontraron en el inciso **b**.

f) Verifiquen que las parejas de valores (x, y) encontradas en el inciso **b** y **d** son en efecto las coordenadas del punto de intersección de las rectas en el primero y el ultimo de los planos cartesianos de la actividad 1.

g) Hagan un reporte de toda la actividad efectuada en los puntos 2 y 3 de esta sesión, y entréguenlo a su maestro. Expliquen con sus propias palabras cómo llegaron a encontrar los valores (x, y) que resuelven o que son soluciones de los sistemas i), iv) y v). Después, lean la información del recuadro siguiente.

En otras palabras

El proceso de **despejar** una de las incógnitas en una ecuación de primer grado con dos incógnitas se asemeja al proceso de resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita, en el sentido de que es necesario llevar a cabo una serie de operaciones aritméticas en ambos miembros de la ecuación, de tal manera que esto lleve a dejar sola una de las dos incógnitas (usualmente la y) en uno de los dos miembros de la igualdad.

Síntesis del método de igualación para la resolución de sistemas de ecuaciones

El **método de igualación** está basado en la transformación de las dos ecuaciones que conforman un sistema, al formato $y = mx + b$, en donde m y b son números que se obtienen en el proceso de **despejar** a la incógnita y, para cada ecuación del sistema. Posteriormente **se igualan los miembros correspondientes de las dos ecuaciones transformadas** y se desencadena un proceso sucesivo de resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, lo que conduce a obtener una pareja de valores (x, y), solución del sistema. (x, y) son también las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas asociadas al sistema.

Método de suma y resta para la resolución de ecuaciones

En parejas, hagan lo que se solicita.

4. De manera preliminar al método de suma y resta, lean y hagan lo que se pide. Imaginen dos balanzas en equilibrio (figuras 11.5a y 11.5b).

Figura 11.5a Una balanza en equilibrio

Figura 11.5b Una balanza en equilibrio

a) Si en ambas balanzas se suman las masas de los platillos de la izquierda y se suman las masas de los platillos de la derecha, ¿la balanza se mantendrá en equilibrio? (Figura 11.6). Argumenten su respuesta. ______________________________

____

____

Figura 11.6 Una balanza: ¿está en equilibrio?

b) Tomen la balanza 11.5a de la página anterior , si la masa de la esfera de la izquierda se multiplica por un entero quedando varias esferas en el platillo de la izquierda, y la masa del cubo de la derecha se multiplica por el mismo número quedando varios cubos en el platillo de la derecha, ¿la balanza se mantendrá en equilibro? (Figura 11.7.)

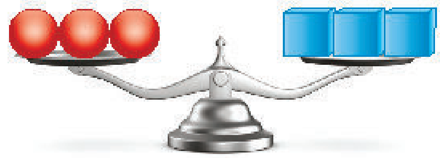


Figura 11.7 Una balanza: ¿está en equilibrio?

c) ¿Las ecuaciones algebraicas tendrán la misma propiedad? Expliquen su respuesta.

d) Digan cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas (argumenten con ejemplos).
   i) Si dos ecuaciones se suman, la ecuación resultante sigue teniendo las mismas soluciones. ______
   ii) Si dos ecuaciones se suman, la soluciones también se suman. ______
   iii) Si ambos lados de una ecuación se multiplican por un número, la ecuación resultante sigue teniendo las mismas soluciones. ______
   iv) Si ambos lados de una ecuación se multiplican por un número, sus soluciones son la multiplicación del número por las soluciones de la ecuación original. ______

e) Reúnanse con otro equipo y comenten sus respuestas. En particular, lleguen a un acuerdo sobre las dos proposiciones correctas del inciso d anterior.

Método de suma y resta para resolver ecuaciones

En parejas, hagan lo que se solicita.

5. Consideren el sistema de ecuaciones y resuelvan encontrando una nueva ecuación sumando las ecuaciones del sistema.

$$x + y = 14$$
$$x - y = 2$$

a) Comprueben las soluciones.

b) Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Después de comprobar que están en lo correcto, respondan por qué funcionó el procedimiento.

La solución al sistema anterior fue directa porque al sumar se elimina una incógnita y se obtiene una ecuación con una sola incógnita, pero ¿qué pasa cuando esto no se puede hacer? En la siguiente actividad encontrarán cómo hacerlo.

Actividad

6. Consideren el sistema de ecuaciones:

$$3x - 2y = 1$$
$$x - y = 12$$

a) ¿Qué se le puede hacer a alguna de las ecuaciones para que al sumarlas se elimine una incógnita? ______

b) En efecto, si ambos miembros de una ecuación se multiplica por un número adecuado al hacer la suma de ecuaciones se eliminará una incógnita. Háganlo y encuentren las soluciones.
c) Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comprueben que su solución funciona bien sustituyendo los valores encontrados en el sistema original.

En general, el método de suma y resta tiene los siguientes pasos:
1) Transformar una ecuación previendo que al sumarla (o restarla) con la otra ecuación del sistema se elimine una incógnita.
2) Hacer la suma (o resta) de una ecuación del sistema con la ecuación transformada de la otra encontrando una nueva ecuación con una sola incógnita.
3) Encontrar la solución de esta ecuación.
4) Con la solución hallada y cualquiera de las ecuaciones del sistema hallar el valor de la otra incógnita.
5) Comprobar las soluciones en el sistema original.

Problemas

7. Resuelvan los sistemas por el método de suma y resta.

i) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 8x + 2y = 12 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

a) Comprueben sus soluciones sustituyendo los valores encontrados y verificando que se dan las igualdades.
b) Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Comenten las dificultades encontradas y cómo las superaron. En reunión grupal disiparán las dudas que aún mantengan.

Método de sustitución

8. Formen parejas y analicen las expresiones algebraicas de la columna derecha. Después escriban en cada paso de la columna izquierda qué fue lo que se hizo y para qué, como se ejemplifica en el paso 1.

Paso 1. Se numeran las ecuaciones con (1) y (2) para identificarlas.	$5x - y = 6$ (1) $y = 3x$ (2)
Paso 2.	$5x - (3x) = 6$ (1')

Paso 3.	$5x - 3x = 6$ (1') $2x = 6$ $x = 3$
Paso 4.	$y = 3x$ (2) $y = 3(3)$ $y = 9$
Paso 5.	$x = 3, \quad y = 9$
Paso 6.	$5(3) - (9) = 6$ (1) $\quad (9) = 3(3)$ (2) $15 - 9 = 6 \quad 9 = 9$ $6 = 6$

Problemas

Formen equipos y realicen lo que se pide.

9. Utilicen el método que consideren más adecuado para resolver los sistemas de ecuaciones generados en los problemas; escriban el sistema resultante y resuélvanlo. Verifiquen en cada caso, haciendo la sustitución de los valores encontrados.

   a) Encuentren dos números cuya suma sea 34 y su diferencia 10.

   b) Hace 8 años la edad de un padre era ocho veces la edad de su hijo y 16 años después de la edad actual la edad del padre será el doble de la edad del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

c) Hace 10 años la edad de Carlos era el cuádruple que la de Javier y hoy es sólo el doble. Determinen las edades actuales de ambos.

d) Se reparten monedas de 20 centavos de dólar y de 25 centavos de dólar entre 44 personas, dando una moneda a cada uno. Si la cantidad repartida es de 9.95 dólares, ¿cuántas personas recibieron monedas de 20 centavos y cuántas de 25 centavos?

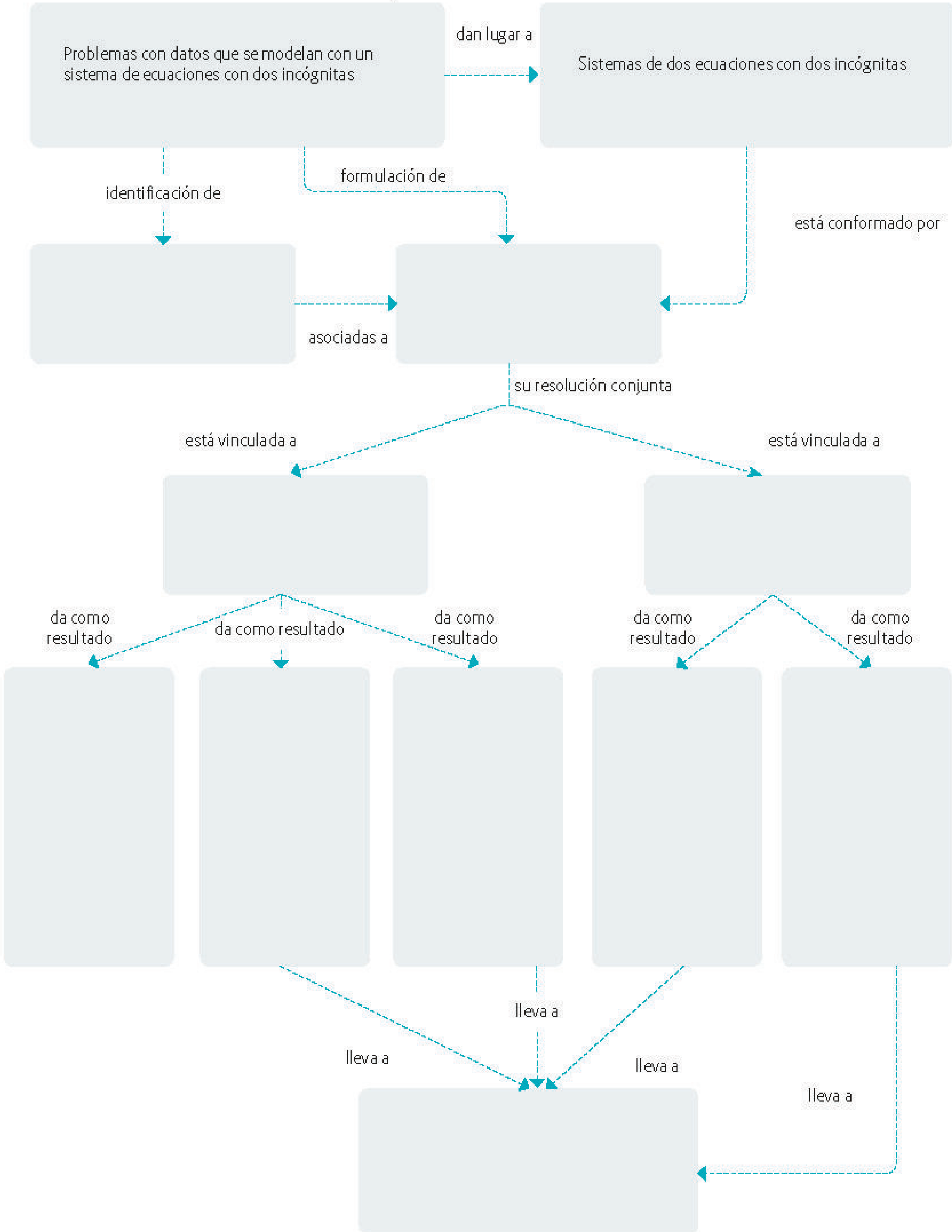
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si en cada caso las soluciones son distintas, revísenlas y arguméntenlas. Lleguen a un acuerdo sobre la respuesta correcta comprobando que satisfacen las ecuaciones y el enunciado de cada problema. Comenten el método que eligieron y la razón para ello. En caso de persistir dudas, formulen sus preguntas al profesor.

En retrospectiva

En esta secuencia de tres sesiones de trabajo se abordó la identificación de incógnitas y la formulación de ecuaciones a partir del enunciado de un problema. En el esquema 11.1 hay rectángulos vacíos que deben llenarse. Lean la lista de temas estudiados en esta secuencia y coloquen cada concepto en un óvalo de modo que el mapa conceptual sea coherente.

- Características de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Características de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Solución grafica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y/o identificación de las tres posibilidades gráficas para un sistema.
- Operaciones con/o entre las ecuaciones de un sistema (suma y resta de ecuaciones y producto de una ecuación por un número dado).
- El método de suma y resta de ecuaciones para encontrar una solución al sistema, y el método de sustitución.

Esquema 11.1 Métodos y conceptos asociados con los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas



¿Qué aprendí?

Respondan individualmente. Hagan las operaciones en su cuaderno.

1. Resuelvan los sistemas de ecuaciones. Usen el método que consideren conveniente.

   a) $\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 16 \\ 5x \quad 3y & = & 22 \end{array}$

   c) $\begin{array}{rcl} 7x + y & = & 27 \\ y & = & 22x \end{array}$

   b) $\begin{array}{rcl} y & = & 5x - 2 \\ x + y & = & 22 \end{array}$

   d) $\begin{array}{rcl} 2x \quad 3y & = & 10 \\ 7x \quad 3y & = & 20 \end{array}$

2. Cuando Juan fue a Estados Unidos le explicaron que una máquina que cambia billetes regresa monedas de 25 y 5 centavos de dólar.
   a) Si cambió un dólar y recibió 12 monedas, ¿cuántas monedas de cada tipo recibió? ____________________
   b) Formulen el sistema de ecuaciones correspondiente.
   c) Encuentren la solución utilizando la representación gráfica del sistema o aplicando el método que consideren conveniente.
   d) Comprueben la solución.

3. Un empleado cobra \$200.00 diarios cuando acude al trabajo, pero cuando falta le descuentan \$50.00.
   a) Si después de 25 días la cantidad de dinero que recibe es de \$4 180.00, encuentren el número de días que asistió al trabajo. ____________________
   b) Formulen el sistema de ecuaciones correspondiente.
   c) Encuentren la solución utilizando la representación gráfica del sistema o aplicando el método que consideren conveniente.
   d) Comprueben la solución.

4. La tienda de doña Chave se especializa en todo tipo de botanas. Vende cacahuates a \$14.00 el kilogramo y almendras a \$32.00 el kilogramo. Al final de un mes, doña Chave se entera de que los cacahuates no se venden bien, y decide mezclarlos con almendras para producir una mezcla de 90 kg, que venderá a \$20.00 el kilogramo.
   a) ¿Cuántos kilogramos de cacahuates y de almendra debe mezclar para mantener los mismos ingresos? ____________________
   b) Formulen el sistema de ecuaciones correspondiente.
   c) Encuentren la solución utilizando la representación gráfica del sistema o aplicando el método que consideren conveniente.
   d) Comprueben la solución.

5. Una agencia de renta de autos cobra una cuota fija más un cargo adicional por cada kilómetro recorrido. Fernando pagó \$2 350.00 por un coche que usó un día y en el que recorrió 80 km, y Pedro pagó \$3900.00 por dos días y 120 km recorridos.
   a) ¿Cuál es la cuota fija y cuál es el cargo por cada kilómetro? ____________________
   b) Formulen el sistema de ecuaciones correspondiente.
   c) Encuentren la solución utilizando la representación gráfica del sistema o aplicando el método que consideren conveniente.
   d) Comprueben la solución.

* Reúnanse con un compañero para revisar las respuestas de esta sección. Si hay discrepancias, intenten encontrar el error. Si aún persiste la duda, reúnanse con otra pareja para dilucidar cuál es la respuesta correcta. Expliquen los procedimientos que usaron y si el procedimiento de alguno de ustedes fue distinto, explíquenlo. Si persiste alguna duda, compártanla con su profesor para que los oriente.

S12 Medidas de tendencia central y de variación

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos, y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Formen parejas. Discutan y respondan lo que se pide. En este problema y en los casos en que no se indique otra cosa, utilicen la calculadora.

1. En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos, A o B. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse, observen y escriban los resultados de lo que ganaron o perdieron 10 personas que participaron en cada juego. Las pérdidas (–) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas.

Juego A	15	–21	–4	50	–2	11	13	–27	15	0
Juego B	128	–118	60	–48	2	134	–81	96	–132	9

a) Si tuvieran que jugar en alguno de los juegos, ¿en cuál jugarían? ¿Por qué?

____

b) Calculen la media aritmética y la mediana de las ganancias de cada juego. Discutan sobre las similitudes y diferencias que encuentren en los datos.

Juego A: Media = ____________ Mediana = ____________

Juego B: Media = ____________ Mediana = ____________

c) Calculen el rango de las ganancias de cada juego. ¿Qué observan?
Juego A. Rango: ____________ Juego B. Rango: ____________

d) Si la conveniencia de un juego se estima o aproxima por la media de las ganancias, ¿qué juego resulta más favorable? Justifiquen su respuesta. ________

____

e) ¿El rango indica qué tan arriesgado es cada juego? Argumenten su respuesta.

____

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Respondan: ¿El cálculo de la media y la mediana les permitió entender algo del juego que no sabían?

En otras palabras

Una **medida de tendencia central** es un representante de un conjunto de datos cuando se usa en lugar del conjunto para hacer formulaciones o cálculos; por ejemplo, cuando se dice "en promedio los jugadores de futbol miden 2 m de altura"; en este caso, 2 m es representante de las estaturas de los jugadores, las cuales en realidad varían alrededor de ese número.

Sesión 1. Medidas de tendencia central como representantes de grupo

Una de las funciones de las **medidas de tendencia central** como la moda, la media y la mediana es que pueden ser representantes de un conjunto de datos. En consecuencia es lícito preguntarse: ¿Qué medida representa mejor a un conjunto de datos: la moda, la media o la mediana? Esta pregunta no tiene una respuesta única y definitiva, a veces es mejor una y a veces la otra.

Actividad

α

En esta actividad decidirán qué medida representa mejor los datos de un conjunto. Formen parejas, lean y hagan lo que se pide.

1. En una tienda de material educativo se hizo el registro de la venta de juegos. Los datos se observan en la tabla 12.1.

Tabla 12.1 Registro de venta de juegos

Juego	Número de ventas	%
Monopolio	43	3
Ajedrez	10	8
Rompecabezas	65	52
Cubo de Rubik	6	5
Total	124	100

a) ¿Cuál es el juego de moda? Expliquen por qué eligieron ese juego.

b) ¿Se puede hablar de la "media" de los juegos? ¿Por qué?

c) ¿Se puede hablar de la "mediana" de los juegos? ¿Por qué?

d) ¿Qué medida de tendencia central resulta representativa? Expliquen su respuesta.

* Reúnanse con otra pareja y comenten sus respuestas. Comenten la siguiente idea: "Cuando la variable en estudio no es numérica, la única medida de tendencia central que es significativa es la moda".

En otras palabras

La **cafeína** y la **taurina** son sustancias estimulantes que se agregan a la fórmula para producir las bebidas llamadas energéticas o energizantes. Estas bebidas aumentan el rendimiento físico y mental; pero varios estudios científicos alertan sobre peligros para la salud debido a su consumo frecuente.

2. En un estudio sobre las sustancias componentes de bebidas energéticas que se venden en México realizado por la Procuraduría Federal del Consumidor se reportan los siguientes valores de **cafeína** y **taurina** por cada 200 ml de contenido (tabla 12.2).

σ

Tabla 12.2 Contenido de cafeína y taurina en bebidas energizantes

Bebida*	Cafeína (mg)	Taurina (mg)
Argos	268	83
Buena vida	96	788
Cruz	68	788
Dinosaurio	60	776
Elefante	58	800
Frescura	56	504
Gigante	51	660
Hércules	62	800
Islas	60	800
Jamelgo	62	565
Katia	39	852
Lobo	37	868

* Los nombres de las bebidas se han inventado pero cada una corresponde a una marca real; no se han nombrado estas para evitar su publicidad.
Fuente: *Revista del Consumidor* (Marzo/2011)

a) Calculen la media aritmética y la mediana de los datos de la variable "cafeína". ______

b) En la recta numérica de la figura 12.1, coloquen por cada dato, un punto en la posición que refleje su magnitud; por ejemplo, el punto representado corresponde al dato 51. (Si hay datos iguales o muy similares, coloquen un punto encima de otro.)

Figura 12.1 Recta numérica para datos de cantidad de cafeína en bebidas

c) En la recta anterior, tracen un segmento de recta vertical en el punto donde se ubica la media y otro en el que se ubica la mediana.

d) ¿Cuál es la razón por la que la media y la mediana son muy diferentes?

______

______

e) Para este caso, ¿qué medida representa mejor al conjunto de datos, la media o la mediana? Expliquen por qué.

3. Consideren los datos de la variable "taurina" mencionados en la actividad 2. Seguirán un procedimiento similar al efectuado en esa actividad.

a) Revisen nuevamente la tabla 12.2. Calculen la media aritmética y la mediana de los datos de la variable "taurina".

b) En la recta numérica de la figura 12.2, coloquen por cada dato, un punto en la posición que refleje su magnitud; por ejemplo, el punto representado corresponde al dato 504. (Si hay datos iguales o muy similares, coloquen un punto encima de otro.)

Figura 12.2 Recta numérica para datos de cantidad de taurina en bebidas

c) En la recta anterior, tracen un segmento de recta vertical en el punto donde se ubica la media y otro en el que se ubica la mediana.

d) ¿Cuál es la razón por la que la media y la mediana son muy diferentes?

e) Para este caso, ¿qué medida representa mejor al conjunto de datos, la media o la mediana? Expliquen por qué.

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, busquen el origen de sus diferencias, revisen sus procedimientos y argumenten hasta llegar a un acuerdo. En particular, digan claramente por qué con estos datos una de las medidas representa mejor al conjunto de datos.

Problemas

4. El profesor de matemáticas, en su clase de geometría, les pide a los estudiantes de uno de sus grupos (grupo A) que utilicen el método de sombras solares y semejanza para estimar hasta con centímetros la altura de un edificio con planta baja y cuatro pisos. Como se formaron nueve equipos, se obtuvieron nueve diferentes mediciones del edificio. Obsérvenlas en la tabla 12.3 y respondan las preguntas.

Tabla 12.3 Medidas de la altura de un edificio usando un método de sombras y semejanza (Método 1)

Grupo A				
13.26 m	14.11 m	12.84 m	13.52 m	12.46 m
12.13 m	14.23 m	13.34 m	13.81	

a) Calculen la media y la mediana de los datos. Efectúen las operaciones en el espacio siguiente.

b) ¿Cuál es más representativa de los datos, la media o la mediana? Expliquen por qué. ______

______

c) Calculen el rango de los datos. Efectúen las operaciones en el espacio siguiente.

d) Digan qué información ofrece el rango. ______

______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Den razones por las que, en este caso, la media es muy cercana a la mediana.

Formen equipos y hagan lo que se pide.

5. Consideren las actividades que han efectuado en esta secuencia y respondan las preguntas. En cada caso, mencionen como ejemplo alguna de las situaciones estudiadas o propongan una nueva.

a) ¿Cuándo es necesario utilizar la moda como representante de datos?

______

______

b) ¿Cuándo es mejor utilizar la mediana como representante de datos?

______

______

Sesión 2. Medidas de tendencia central en datos agrupados e histogramas

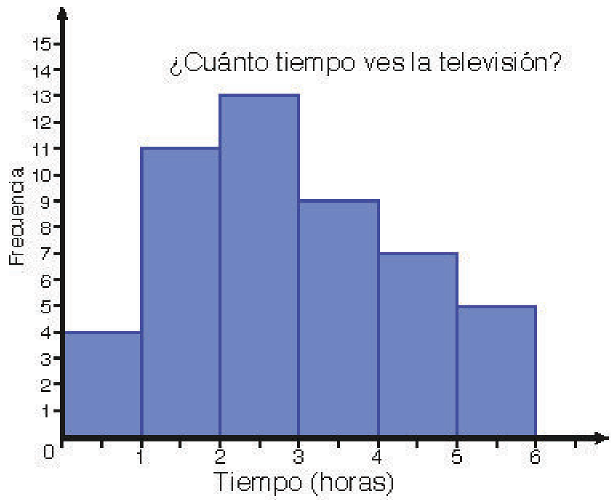
Mucha información se ofrece en tablas de datos agrupados o gráficas (diagramas de barras o histogramas) y conviene saber determinar las medidas de tendencia central a partir de ellas. En la siguiente actividad encontrarán la manera de hacerlo.

α

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. En la encuesta de "¿Cuánto tiempo ves la TV?" que se sugirió en la sección *Una mirada previa* de la secuencia 8 de este libro, un equipo de alumnos hizo el estudio y organizó los datos en el histograma de la gráfica 12.1. Analícenlo y respondan las preguntas.



Gráfica 12.1 Histograma de tiempo en que mira TV gente entrevistada

a) ¿Cuántas personas se entrevistaron? ______

b) ¿Cuál es la moda de los datos? ______

c) ¿Cuál es la media de los datos? ______

d) ¿Cuál es la mediana de los datos? ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten la dificultad para obtener la media y la mediana; si no obtuvieron que la media es 2.96, con el estudio de las siguientes actividades de la sesión lo lograrán.

En el problema anterior el cálculo más laborioso es el de la media, pues la moda es la marca de clase del rectángulo más alto. Para encontrar la mediana debe considerarse que son 50 datos, después identificar el intervalo en el que estén los datos 25 y 26.

σ

Después se toma la marca de clase del intervalo que contiene los datos 25 y 26, que, en el caso del histograma de la gráfica 12.1 es 2.5.

En el caso de la media también se consideran las marcas de clase y de cada una de ellas su frecuencia. Hagan la siguiente actividad para obtenerla.

Actividad

Continúen trabajando en parejas.

2. Observen nuevamente la gráfica 12.1 y encuentren la frecuencia de cada rectángulo. Anótenla debajo de la marca de clase correspondiente en la tabla 12.4.

Tabla 12.4 Frecuencias de los datos del histograma de la gráfica 12.1

Tiempo (h)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5
Frecuencia								

a) Calculen la media (para calcular la media aritmética se multiplica cada marca de clase del tiempo por su frecuencia, se suman todos los productos y se divide entre la suma de las frecuencias).

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten su propuesta. Dejen claro por qué la media no es la siguiente: $\frac{4+11+13+9+7+5+1+0}{8} = \frac{50}{8} = 6.25$.

Problemas

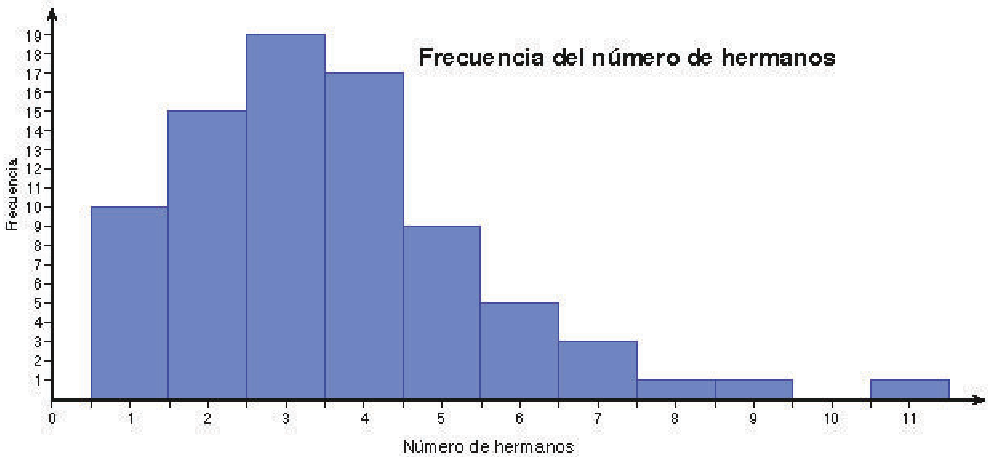
Formen nuevas parejas y resuelvan los problemas.

3. En un elevador se suben ocho estudiantes, cinco hombres y tres mujeres. La media aritmética de la masa de los hombres es de 70 kg y la media aritmética de la masa de las mujeres es de 54 kg.

a) ¿Cuál es la media aritmética de la masa de todos? Hagan sus cálculos en el siguiente espacio. __________

b) Si fueran tres hombres cuya media aritmética de su masa fuera la misma que en el inciso **a** y cinco mujeres con la misma media aritmética que en el inciso **a**, ¿cuál sería la media aritmética de la masa de los ocho?

4. En un grupo de la escuela se preguntó a los estudiantes cuántos hermanos tienen. Los datos se organizaron y con ellos se trazó el histograma de la gráfica 12.2. Analícenlo y respondan.



Gráfica 12.2 Histograma del número de hermanos que tienen los estudiantes

a) ¿Cuántos alumnos fueron entrevistados?

b) Llenen la tabla 12.5 con los datos que están representados en la gráfica 12.2 (observen el ejemplo).

Tabla 12.5 Frecuencia del número de hermanos

	1										11
	10										1

c) ¿Cuál es la moda, mediana y media del conjunto de datos agrupados?

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus procedimientos y argumenten hasta llegar a un acuerdo.

Sesión 3. Medidas de variación

α

1. Formen parejas y responde con base en sus conocimientos actuales.
   a) ¿Qué significa para ustedes la palabra "variación"? ______
   b) ¿Qué entienden por "variación de un conjunto de datos"? ______
   c) ¿Conocen alguna medida de variación de los datos? ¿Cuál? ______
   d) ¿Cuál consideran que es la utilidad de las medidas de variación en estadística? ______

En muchos análisis estadísticos lo primero que se debe hacer con un conjunto de datos es obtener una medida de centralización, frecuentemente la media aritmética o la mediana. Aunque esta medida de centralización es un buen representante de los datos, también es importante considerar la variación de los datos, como se muestra en las siguientes actividades.

Actividad

Formen parejas y hagan lo que se pide.

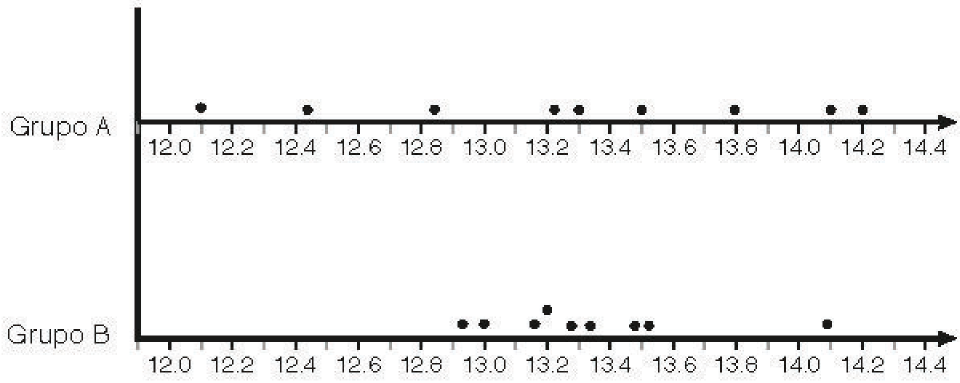
σ

2. Consideren el problema 4 de la sesión 1 de la presente secuencia. Imaginen que en otro grupo de la clase de geometría también nueve equipos midieron el mismo edificio con una planta baja y cuatro pisos y obtuvieron las medidas que se muestran en la tabla 12.6. Ellos utilizaron un método diferente al de sombras y semejanza (método 2).

Tabla 12.6 Medidas (en metros) de la altura de un edificio usando un método diferente

Grupo B								
12.94	13.15	13.27	13.01	13.16	13.33	13.48	13.52	14.11

   a) Calculen la media y la mediana. ¿Qué observan en comparación con la media y mediana del grupo A? ______
   b) En la gráfica 12.3 de la siguiente página, se presentan dos rectas numéricas. En la del grupo A se representa con puntos los datos de la tabla 12.3. En la del grupo B, los datos de la tabla 12.6. ¿En qué conjunto de datos hay más variación? Justifiquen su respuesta. ______



Gráfica 12.3 Rectas numéricas para datos de medidas de un edificio

c) ¿Cuál es el rango de cada conjunto de datos? Hagan sus cálculos en el siguiente espacio.

d) Justifiquen su respuesta. ____________________

e) ¿Qué método es más preciso, el del grupo A o el del grupo B? Expliquen por qué. ____________________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Respondan la pregunta: ¿Cómo se relaciona la dispersión con la precisión? Redacten la respuesta entre los cuatro y escríbanla a continuación. ____________________

Aunque el rango es un indicador de la dispersión o variación en los datos, no siempre ofrece información precisa acerca de ella.

Una medida de variación es mejor cuando es sensible a las diferencias que existen en los datos, es decir que, entre mayores sean las diferencias entre los datos, mayor es la variación. Para que concreten esta idea lleven a cabo las siguientes actividades

Actividad

Formen nuevas parejas y hagan lo que se indique.

3. Consideren nuevamente los datos de la tabla 12.3 y 12.6 sobre las medidas de un edificio. En el grupo B se incorporaron dos nuevos alumnos cuyas medidas fueron 12.13 y 14.23 metros. Añadiendo estos datos al grupo B, vamos a formar el grupo C. Respondan las peguntas.

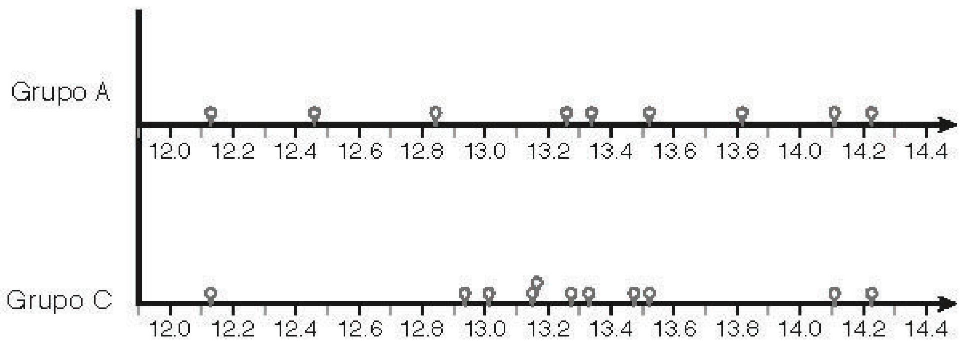
a) ¿Cuál es la media y la mediana del grupo C? Hagan sus cálculos en el siguiente espacio. ______

b) ¿Cómo son la nueva media y la nueva mediana respecto a las del grupo B?

______

______

4. A continuación se muestran las gráficas de puntos de los datos del grupo A y del Grupo C (gráfica 12.4).



Gráfica 12.4 Gráfica de puntos de los datos de medidas de un edificio

a) ¿En qué grupo están más dispersos los datos? Expliquen. ______

______

b) ¿Cuál es el rango de cada grupo de datos? ¿Cómo son entre sí? ______

______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Justifiquen lo siguiente: "aunque el rango es un indicador de la dispersión o variación, no es muy preciso".

La desviación media como medida de la variación

En vista de que el rango es un indicador insuficiente para la dispersión o variación de un conjunto de datos se requiere de una nueva medida. En la siguiente actividad identificarán una mejor medida de la dispersión o variación.

5. Analicen la gráfica 12.5. En ella se presentan las gráficas de puntos de cuatro conjuntos de números.

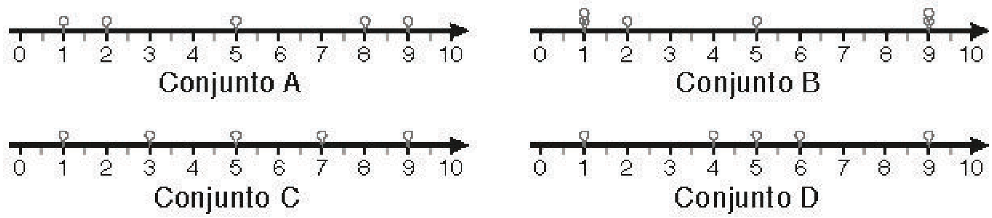


Figura 12.5 Cuatro conjuntos de cinco datos cada uno

a) Enlista los datos correspondientes a cada conjunto y calculen su media.

- Conjunto A. ______
- Conjunto B. ______
- Conjunto C. ______
- Conjunto D. ______

b) ¿En cuál conjunto perciben que hay más dispersión y en cuál menor dispersión? ______

______

c) Consideren la lista que hicieron en el inciso a. Escriban en cada caso, la desviación respecto a la media de cada dato de los conjuntos A, B, C, y D.

A: ______ B: ______

C: ______ D: ______

d) Con los datos del inciso anterior, calculen la desviación media de cada conjunto.

e) ¿Cuál conjunto tiene mayor desviación media y cuál menor? ______

______

En otras palabras

Se llama **desviación respecto a la media** de un dato al valor absoluto de la diferencia del dato con la media.

La **desviación media** (DM) de un conjunto de datos es la media aritmética de las desviaciones respecto de la media.

f) ¿Consideran que la desviación media es una buena medida de la dispersión? Expliquen. ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Argumenten que la desviación media es una mejor medida de la dispersión de un conjunto que el rango.

6. La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de los datos respecto a la media. Describan en 4 pasos cómo encontrar la desviación media de un conjunto de datos.

Paso 1. ______

Paso 2. ______

Paso 3. ______

Paso 4. ______

Problemas

Trabajen en parejas para resolver los problemas.

7. El papá de Raúl se va a comprar un auto y encontró los siguientes precios (en pesos) en el mercado de autos usados del año y modelo que desea.

125 000	111 500	123 800	139 500	124 300

Si se quiere comprar el auto más económico cuyo precio se encuentre dentro de una desviación media alrededor de la media aritmética. ¿Qué precio tendría dicho auto? Hagan el cálculo en el siguiente espacio.

8. Juan quiere saber si su estatura está cerca de la estatura promedio de los niños de su edad (13 años). Para esto les preguntó a ocho amigos su estatura y obtuvo los siguientes datos (en metros).

1.49	1.57	1.51	1.36	1.66	1.56	1.54	1.63

a) Juan mide 1.48 m. ¿Cómo es la desviación de su estatura respecto a la desviación media de las alturas de los ocho amigos? ______

Retomando una mirada previa

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. Recuerden la situación planteada en la sección *Una mirada previa* en la que se tienen los resultados de dos juegos y queremos saber en cuál conviene jugar.

Juego A	15	−21	−4	50	−2	11	13	−27	15	0
Juego B	128	−118	60	−48	2	134	−81	96	−132	9

a) Juan y Karla razonan de la siguiente manera:

- Juan dice que es mejor el juego B porque se puede ganar hasta 134 mientras que en el juego A se gana sólo hasta 50.
- Karla dice que es mejor el juego A porque pierdes menos (se pierde hasta 27) que en el juego B (se pierde hasta 132).

Expliquen si el razonamiento de Juan es correcto o no y lo mismo para el de Karla. ______

______

b) Parece que ambos juegos son igualmente convenientes en términos de las ganancias promedio (media aritmética). ¿Son iguales en términos del riesgo o hay alguno más arriesgado que otro? ______

______

c) ¿Qué juego debería elegir una persona a la que le gusta correr riesgo? ______

______

d) ¿Qué juego debería elegir una persona que no le gusta correr riesgo? ______

______

e) Obtengan las desviaciones medias de ambos juegos. ______

______

f) ¿Hay alguna relación entre el riesgo y las desviaciones medias? ______

______

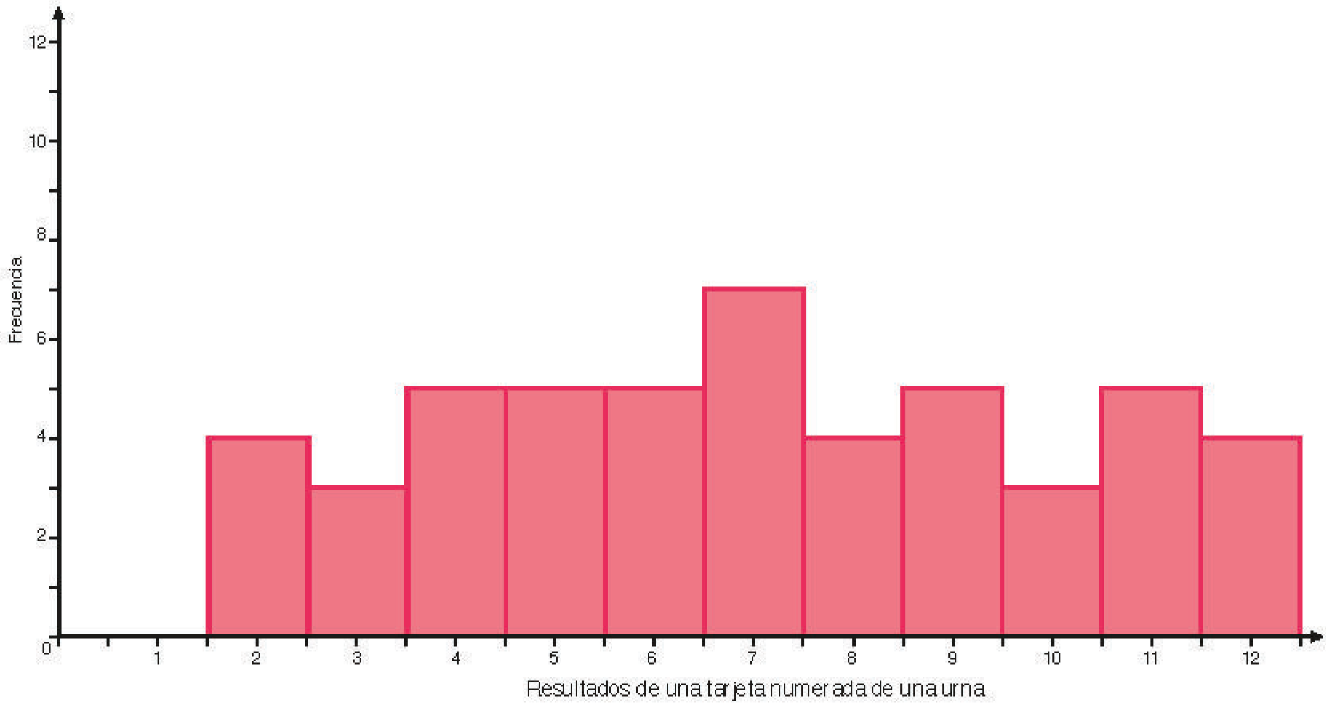
______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten y respondan la siguiente pregunta: ¿Qué nos dice la variación (desviación media) en situaciones de riesgo?"

2. Consideren las siguientes situaciones.

- Situación 1. Una urna tiene 11 boletos numerados del 2 al 12. Se mezclan al azar los boletos, se saca uno y se observa y registra su número; luego, se devuelve el boleto a la urna y se saca otra vez. Esto se repite 50 veces. Los resultados se representan en el histograma de la gráfica 12.6.
- Situación 2. Se lanzan dos dados y se observa la suma de los resultados de cada dado. Este experimento se realiza 50 veces. Los resultados se grafican en el histograma de la gráfica 12.7 (página 162).

Se recolectaron 50 datos en cada una de las situaciones y se representaron gráficamente. La gráfica 12.6 corresponde a los datos de la variable "número de la tarjeta" de la situación 1, mientras que la gráfica 12.7 corresponde a los datos de "la suma de la cara de los dados" de la situación 2.



Gráfica 12.6 Tarjetas numeradas de una urna

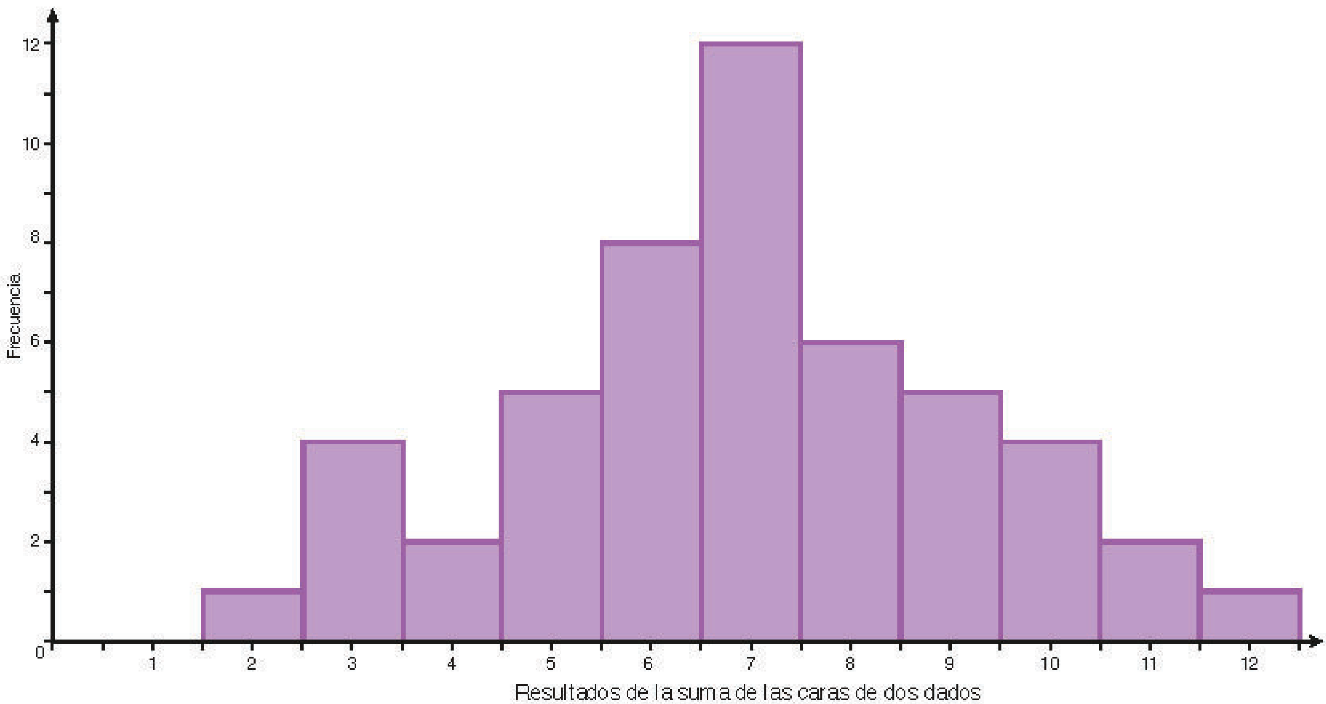


Figura 12.7 Suma de las cara de dos dados

a) ¿En qué conjunto de datos hay más variación: en los datos de la situación 1 o en los datos de la situación 2? ¿Por qué? ______

b) Calculen en el espacio siguiente la desviación medida de cada conjunto de datos y comparen con lo que previeron en el inciso anterior. ______

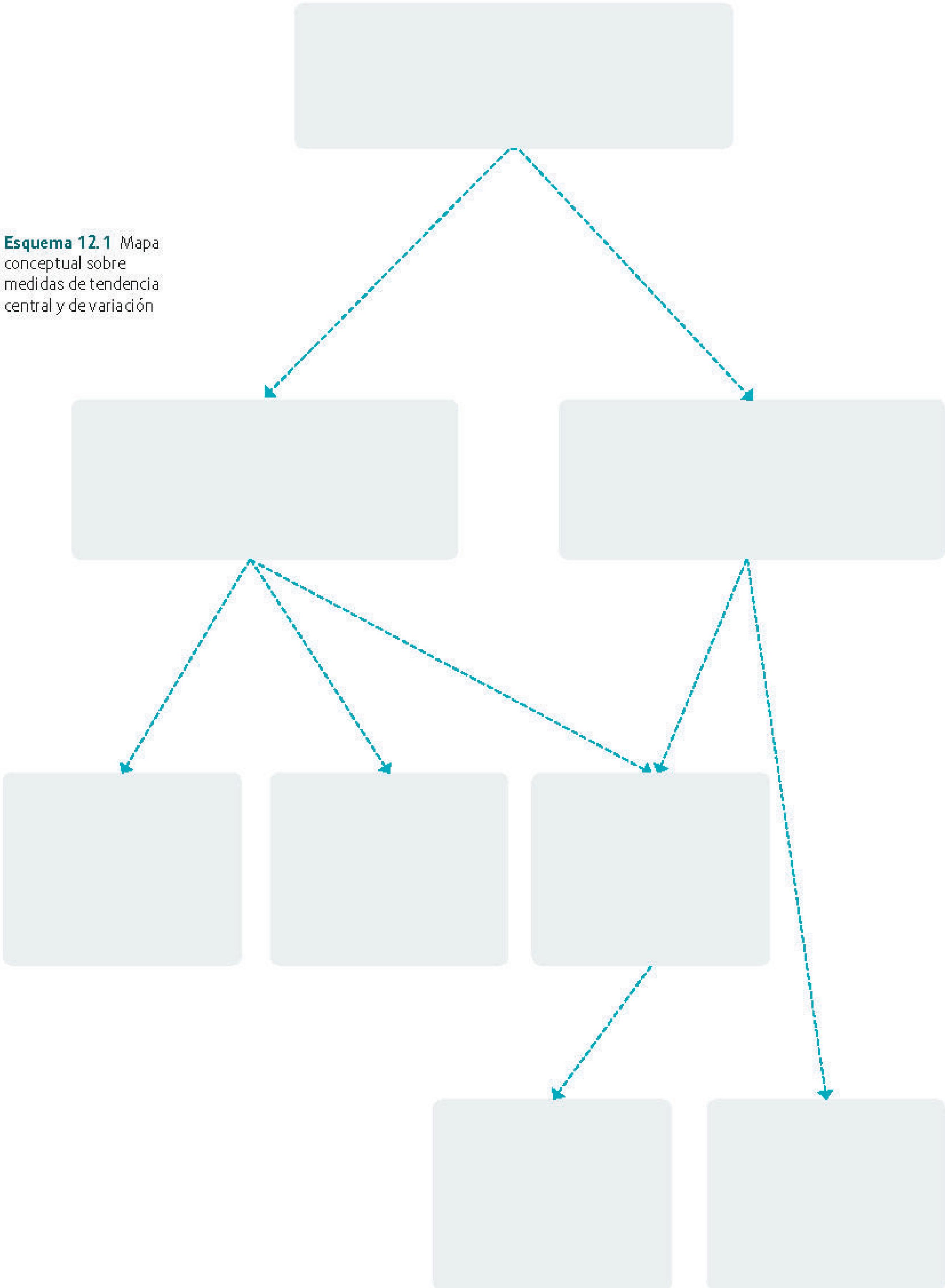
* Reúnanse con otra pareja y comenten sus resultados. En particular, digan si el resultado coincide con lo que pensaban al inicio de la secuencia. Respondan: ¿Qué es lo que aprendieron con relación a la variación en un conjunto de datos?

En retrospectiva

Trabajen individualmente.

Coloquen cada una de las siguientes frases (que están en orden alfabético) en el esquema 12.1 de manera que muestre relaciones correctas.

- Desviación media
- Las medidas de la estadística se dividen en:
- Media
- Medidas de tendencia central
- Medidas de variación o dispersión
- Moda
- Mediana
- Rango



Esquema 12.1 Mapa conceptual sobre medidas de tendencia central y de variación

¿Qué aprendí?

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. La distancia de la Tierra a la Luna.

   Diferentes grupos de astrónomos aficionados se propusieron determinar la distancia de la Luna a la Tierra llevando a cabo el método de Aristarco (tomar medidas en los eclipses y utilizar trigonometría); en la tabla 12.7 se muestran 10 medidas aplicando el método de Aristarco, tomadas independientemente una de otra por los diferentes equipos.

En otras palabras

La trigonometría es una parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Tabla 12.7 Medidas, en kilómetros, de la distancia entre la Tierra y la Luna con el método de Aristarco

356 978	401 114	280 059	321 355	430 400
424 084	440 731	414 177	404 317	440 731

a) Calculen la media y la desviación media de los datos. ____________

b) Con base en los datos anteriores, digan qué valor de los calculados en el inciso a tomarían como la mejor aproximación de la distancia de la Tierra a la Luna. ____________

c) Calculen la media aritmética de las medidas de la tabla 12.7. ____________

Otros equipos de astrónomos aficionados siguieron otro procedimiento apoyados con el uso de telescopios. En la tabla 12.8 se muestran las medidas que se han obtenido de manera independiente por 10 equipos de astrónomos.

Tabla 12.8 Distancia, en kilómetros, entre la Tierra y la Luna obtenidas con un método que usa el telescopio

369 415	400 120	379 589	392 833	394 518
395 812	368 129	370 662	362 785	379 065 km

d) Con base en los datos anteriores, expliquen qué valor entre la moda, la media y la mediana de las medidas tomadas es la mejor aproximación de la distancia de la Tierra a la Luna.

____

e) Calculen la media aritmética de las medidas de la tabla 12.8. ____________

f) ¿En qué tabla, 12.7 o 12.8, hay más variación? Justifiquen su respuesta.

____

g) ¿Qué método es más preciso, el método que se utilizó en los datos de la tabla 12.7 o el método que se utilizó en la tabla 12.8? ____________

h) ¿Qué relación hay entre variación y precisión? ____________

2. En la Encuesta Nacional de hábitos culturales de Conaculta 2013 se formuló la siguiente pregunta:
"En los últimos tres meses, ¿cuántas veces fue al cine?", y tomando la respuesta de 100 personas de la Ciudad de México se obtuvieron los datos que se muestran en la tabla 12.9.

Tabla 12.9 Encuesta nacional de hábitos culturales

Número de veces que asistió al cine	0	1	2	3	4	5	6	7
Número de personas que respondieron	43	25	15	7	5	3	1	1

Fuente: http://www.conaculta.gob.mx/encuesta_nacional

a) Calculen la media aritmética del número de veces que las 100 personas de la muestra asistieron al cine en tres meses. ______

b) Calculen la DM. ______

c) Expliquen qué indica la DM en ese caso. ______

3. En un grupo de 27 niños de ocho y nueve años que habían tenido una enfermedad al nacer se les aplicó una prueba auditiva cuyos resultados se muestran en la tabla 12.10.

Tabla 12.10 Resultados de la prueba al grupo de niños que tuvieron la enfermedad

Grupo con la enfermedad													
24	19	22	31	19	15	13	9	15	21	32	12	19	24
17	23	28	13	26	39	26	22	33	19	16	9	27	

En otro grupo de 27 niños de la misma edad que no tuvieron la enfermedad se les aplicó la misma prueba y los resultados se muestran en la tabla 12.11.

Tabla 12.11 Resultados de la prueba al grupo de niños que no tuvieron la enfermedad

Grupo que no tuvo la enfermedad													
10*	15	20	28	29	11	11	28	6	16	20	24	6	14
11	32	23	20	17	24	19	21	16	14	8	18	12	

* El examen consiste en detectar el sonido más suave que se puede percibir en decibeles (dB), una medida de la intensidad del sonido, a una frecuencia de 1 000 hercios (Hz). Los valores posibles están entre 0 hasta 120 dB.

En otras palabras

Un decibeles (dB) es una unidad que se utiliza para medir la intensidad del sonido y otras magnitudes físicas. Un decibelio es la décima parte de un belio (B), unidad que recibe su nombre por Graham Bell, el inventor del teléfono.

Los resultados de las tablas 12.10 y 12.11 se interpretan como se muestra en la tabla 12.12.

Tabla 12.12 Resultados de la prueba al grupo de niños que sí tuvieron la enfermedad

Resultado de la prueba (dB)	de 0 a 20 (dB)	de 20 a 30 (dB)	de 40 a 55 (dB)	de 55 a 70 (dB)	de 70 a 120 (dB)
Interpretación	Audición normal	Pérdida auditiva ligera	Pérdida auditiva moderada	Pérdida auditiva moderada severa	Pérdida auditiva total

a) ¿Se puede decir que la enfermedad tuvo consecuencias en la percepción auditiva de los niños? ____________________

b) Discutan cómo utilizar los datos para responder la pregunta del inciso anterior.

c) ¿Puede ayudar el calcular las medias aritméticas y las desviaciones medias de cada conjunto? Argumenten su respuesta. ____________________

____

d) Organicen los datos y hagan en su cuaderno los histogramas correspondientes (tomen intervalos de 15 unidades a partir del 5 hasta el 45). Discutan qué similitudes y diferencias encuentran en esas gráficas.

e) Encuentren los datos y llenen la tabla 12.13.

Tabla 12.13 Media, mediana y desviación media de los datos de la prueba de audición

	Niños que tuvieron la enfermedad	Niños que no tuvieron la enfermedad
Media		
Mediana		
Desviación media		

f) ¿Los datos apoyan la hipótesis de que los niños con la enfermedad tienen más deficiencia auditiva que los niños del grupo control? ____________________
Justifiquen ____________________

* Reúnanse con otro equipo y comenten sus respuestas.

BLOQUE 2

S13 Variación lineal y proporcionalidad inversa

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Formen parejas y resuelvan el problema.

1. El tren AVE de Madrid a Barcelona recorre aproximadamente 650 km y viaja a una velocidad promedio de 260 km/h.

   a) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar de Madrid a Barcelona? ____________________

   b) Si corriera a una velocidad de 100 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en hacer ese recorrido? ____________________

   c) Calculen el tiempo que tardaría el tren en llegar a Barcelona si viajara a 200 km/h, a 250 km/h y a 300 km/h. Con los resultados completen las dos primeras filas de la tabla 13.1. Expresen el tiempo en decimales de hora.

Tabla 13.1 Variación del tiempo del recorrido dependiendo de la velocidad del tren

Velocidad (km/h)	100	200	250	300
Tiempo (h)				
Velocidad × tiempo (km)				

   d) Si ahora para cada columna multiplican el valor de la velocidad por el del tiempo correspondiente, ¿qué valores se obtienen? Escríbanlo en la tabla 13.1.

   e) Expresen con sus propias palabras la relación que se observa entre la velocidad del tren y el tiempo del recorrido. ¿Se puede decir que hay una regla general entre estas variables? Si la hay, escríbanla. ____________________

   ____

   f) Completen los enunciados y respondan.

   - Una relación entre dos cantidades es directa cuando varían de modo que si una cantidad crece, la otra ____________________, o si una cantidad decrece, la otra ____________________.
   - Una relación entre dos cantidades es inversa cuando varían de manera que si una cantidad crece, la otra ____________________, o si una cantidad decrece, la otra ____________________.
   - ¿Cuándo una relación es de proporcionalidad directa? ____________________
   - ¿Cuándo una relación es de proporcionalidad inversa? ____________________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Con ayuda del profesor lleguen a un acuerdo sobre las que son correctas.

Sesión 1. Relaciones de proporcionalidad inversa entre dos variables *x*, *y*

Problemas

α

Trabajen en parejas. Lean cada problema y lleven a cabo lo que se pide.

1. Robert Boyle (1627-1691) fue un físico irlandés que descubrió la ahora conocida ley de Boyle de los gases. Hizo un experimento en el que introdujo un gas en un cilindro con un émbolo y comprobó las distintas presiones al bajar el émbolo, es decir, al disminuir el volumen. A continuación, se muestran algunos de los resultados que obtuvo. [Nota: En la tabla, atm es una medida física de presión llamada "atmósfera".]

   Después de llenar la tabla, hagan lo que se indica.

Tabla 13.2 Relación entre presión y volumen de un gas

Presión (atm)	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Volumen (L)	60	30	20	15	12	10

a) Calculen el volumen del gas si la presión fuera de cinco atmósferas. ______

b) Calculen la presión si el volumen del gas fuera de 25 L. ______

c) ¿Cuál es el resultado de multiplicar la presión por el volumen? ______

d) Si V es el volumen y P la presión, ¿cuál es la ecuación que expresa la relación algebraica entre las cantidades de la tabla 13.2? ______

2. Un terreno se va a fraccionar en parcelas y se quiere que cada fracción tenga un área de 25 unidades cuadradas. Los fraccionadores se preguntan por las diferentes formas o dimensiones que puede tener el terreno, es decir, si forzosamente tienen que ser de forma cuadrada de 5×5 unidades cuadradas.

a) Tracen cinco rectángulos de área igual a 25 m^2 cuyas bases sean de 1 u, 2 u, 3 u, 4 u y 5 u, respectivamente. [Nota: u = unidades]

b) Determinen las alturas de cada rectángulo.
c) Las relaciones entre la base y la altura de rectángulos de una misma área, ¿son inversamente proporcionales? Justifiquen su respuesta. ________________

____

d) Si x es la base y y es la altura de un rectángulo de área igual a 25 u^2, ¿cuál es la expresión algebraica que relaciona esas cantidades? ________________

____

3. Consideren que todos los albañiles en una obra trabajan a un mismo ritmo y con la misma habilidad. Con base en eso, lleven a cabo las siguientes actividades.
a) Si dos albañiles construyen una barda en 16 horas (en dos jornadas de ocho horas por día), ¿cuántas horas tardarán en construirla cuatro albañiles?

____

b) Si se quiere construir la barda en cuatro horas, ¿cuántos albañiles se necesitan? ________________

____

c) Completen la tabla 13.3.

Tabla 13.3 Variación del tiempo de construcción dependiendo del número de albañiles en la obra

Cantidad de albañiles	2	4	8	16
Tiempo (horas de construcción)	16			

d) ¿Cuál es el resultado de multiplicar el número de albañiles por el tiempo en que realizan el trabajo? ________________

____

e) Con su compañero de equipo discutan algunas restricciones para este problema. Por ejemplo, ¿qué pasa si se contratan 500 albañiles? ________________

____

f) Usen las literales x y y para representar dos cantidades y k para la constante de proporcionalidad. Expresen las relaciones siguientes por medio de una ecuación:

i) x y y tienen una relación de proporcionalidad directa. ________________

ii) x y y tienen una relación de proporcionalidad inversa. ________________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Lleguen a un acuerdo con ayuda del profesor sobre las que son correctas.

4. Formen ternas con otros compañeros. Comenten los resultados que obtuvieron en los incisos d en las actividades 1 y 2 de esta sesión.
a) Enlisten las ecuaciones que modelaron los datos en los problemas y/o las situaciones involucradas en los problemas y compárenlas.

- Ecuaciones de la actividad 1. ________________
- Ecuaciones de la actividad 2. ________________

b) ¿Cuáles son las soluciones de las ecuaciones planteadas?

- Soluciones de las ecuaciones de la actividad 1. ______
- Soluciones de las ecuaciones de la actividad 2. ______

c) ¿Tienen características generales las soluciones a este tipo de ecuaciones? Expliquen. ______

d) ¿Tienen una conjetura o un procedimiento general para encontrar las soluciones de cualquier relación de proporcionalidad inversa? Escríbanla enseguida. ______

Actividad

Continúen trabajando en parejas.

5. Tracen en su cuaderno las gráficas de las ecuaciones siguientes y comparen las representaciones gráficas obtenidas.

a) $xy = 2$

b) $x = 2y$

c) $y = \frac{2}{x}$

d) $y = 2x$

6. Consideren el inciso **a** ($xy = 2$) de la actividad 5 y hagan lo que se pide.

a) Completen el cálculo de las parejas de valores que aparecen en la tabla 13.4. Noten que para calcular el valor de y siempre conviene despejar esa variable.

b) Recuerden que la división entre cero no está definida, por lo que hay dos relaciones en las que no deben usar ese valor para la variable. ¿Qué incisos son?

______

Tabla 13.4 Variación de y según los valores de x ($xy = 2$)

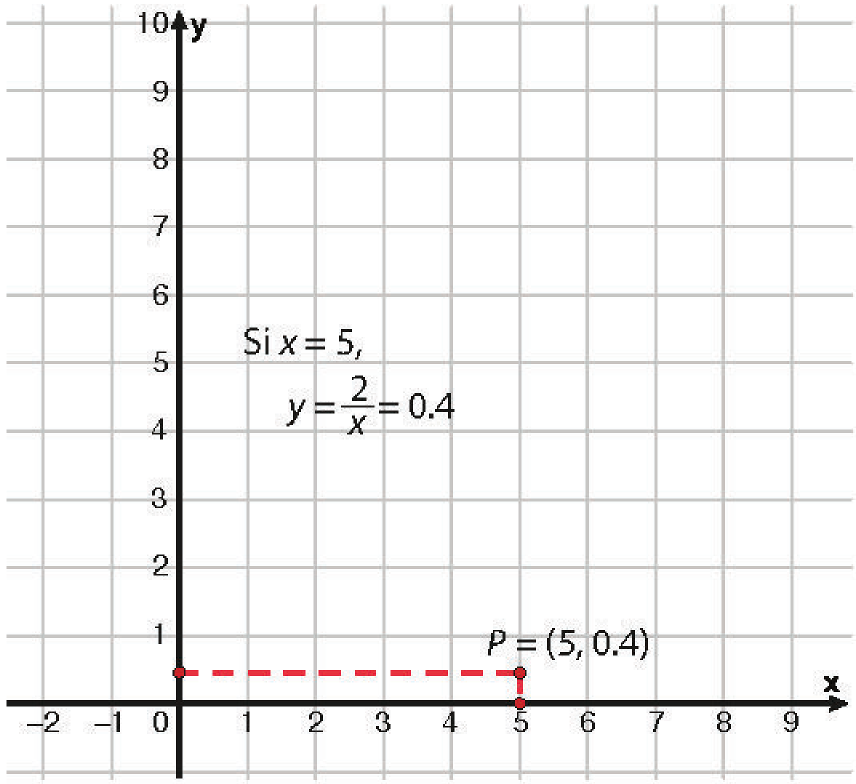
x	1	2	3	4	5
y					0.4

b) En el plano cartesiano que aparece enseguida ya está colocada la pareja de valores (5, 0.4). Cuando terminen de llenar la tabla, ubiquen los puntos correspondientes en el plano cartesiano de la gráfica 13.1.

c) Unan las cinco parejas de valores mediante una línea continua y respondan. ¿Qué tipo de gráfica es la representación obtenida? ______________________

____

d) En su cuaderno, lleven a cabo las actividades descritas en los incisos **a**, **b** y **c** para obtener la representación gráfica de las ecuaciones restantes.



Gráfica 13.1 Variaciones de y dependiendo x

$x = 2y$ $\qquad$ $y = \frac{2}{x}$ $\qquad$ $y = 2x$

e) Comparen las representaciones gráficas de las cuatro ecuaciones dadas.

* Reúnanse en equipos para comparar sus gráficas. Si ven diferencias, discutan el procedimiento que siguieron para obtenerlas y lleguen a un acuerdo sobre cuál de ellos es correcto.

7. Trabajen en parejas para analizar la representación gráfica de la ecuación $y = \frac{12}{x}$.

a) Consideren los valores para las variables sugeridos en la tabla 13.5 y complétenla.

Tabla 13.5 Variación de y dependiendo de los valores de x

$y = \frac{12}{x}$							
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5

b) Tracen en su cuaderno un plano cartesiano similar al que aparece en la gráfica 13.1. Ubiquen en él los puntos definidos por las parejas de valores correspondientes (x, y) que obtuvieron en la tabla 13.5.

c) ¿Qué sucede con los valores de y a medida que los valores de x crecen?

d) ¿Qué sucede con los valores de y a medida que los valores de x decrecen?

e) ¿Qué sucede con los valores de y cuando x se acerca a cero?

f) ¿La variable x puede tomar el valor de cero? ¿Por qué?

g) En la gráfica, ¿qué significa en este contexto que x sea igual a cero?

8. Repitan el problema 7 ahora con los valores de la tabla 13.6. Hagan la gráfica en la misma hoja en la que graficaron la tabla 13.5.

Tabla 13.6 Variación de y dependiendo de los valores de x

$y = \frac{12}{x}$							
x	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	-5

a) De las siguientes ecuaciones, elijan la que consideren equivalente a $xy = k$, satisfecha por dos cantidades variables x, y que son inversamente proporcionales.

$y = kx$ $\qquad$ $x = ky$ $\qquad$ $y = \frac{2}{x}$

b) En las ecuaciones anteriores, ¿cuáles son valores posibles para la constante k? Elijan dos de esas ecuaciones y construyan en su cuaderno, las gráficas para cada uno de los dos valores de k elegidos.

* Completen el resultado de lo que encontraron en las actividades 7 y 8.

En las relaciones de proporcionalidad inversa $xy = k$, donde $k > 0$, las variables no toman nunca el valor de 0 por lo que su gráfica está dividida en dos partes o ramas. Si la variable x es positiva y decrece aproximándose a 0, la variable y también es positiva y crece cada vez más. Si x es negativa y crece, se aproxima a 0 y los valores de y son negativos y decrece cada vez más. Ninguna de las dos ramas toca al eje x. Este tipo de gráfica se llama hipérbola.

La literal k puede ser negativa y se cumplirán relaciones similares.

Problemas

9. En parejas analicen cada problema planteado en los incisos **a**, **b** y **c**; después completen la tabla 13.7 con la ecuación que representa cada problema. En cada caso indiquen qué tipo de relación tienen las variables involucradas escribiendo una P en la columna que corresponde a dicha relación.

Tabla 13.7 Distintas ecuaciones y tipos de relación entre las variables *x*, *y*

Problema	Ecuación que modela la situación o el problema	La relación entre las variables *x*, *y* es inversamente proporcional	La relación entre las variables *x*, *y* es de otro tipo (distinto de inversamente proporcional)
a)			
b)			
c)			

a) El precio *x* de un dulce varía de acuerdo con la lista de valores que se indican a continuación. Completen la lista con el número *y* de dulces que se pueden comprar con $100.00.

x	*y*
$5.00	______
$10.00	______
$15.00	______
$20.00	______

b) Dos grifos que vierten agua de forma constante llenan un depósito en seis horas. Si se usan seis grifos para llenar ese depósito, ¿cuánto tiempo tardarán en llenarlo? Varíen el número de grifos para hacer variar el tiempo de llenado de manera correspondiente a los datos dados. ______

______

c) Se sabe que 10 kg de forraje duran cinco días para alimentar 20 vacas. ¿Cuánto tiempo durará la misma cantidad de forraje al aumentar el número de vacas que se tienen que alimentar?
   - Varíen el número de vacas y obtengan el tiempo correspondiente de acuerdo con los datos dados.
   - ¿Cuál es el resultado de multiplicar el número de vacas por el tiempo que dura el forraje? ______

______

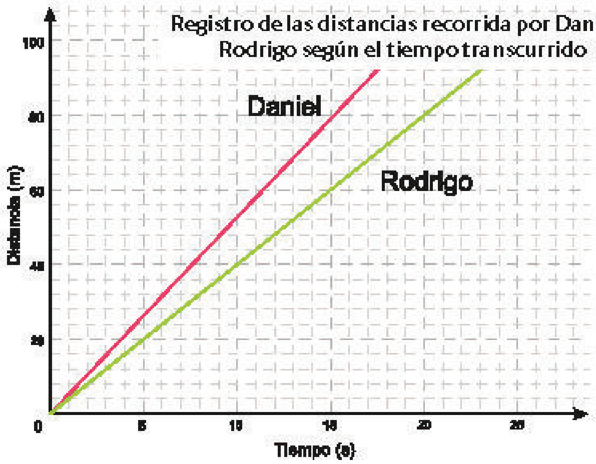
* Reúnanse con sus compañeros y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen su procedimiento y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre la respuesta correcta. Comenten, además, como hicieron las representaciones gráficas que se pidieron a lo largo de esta sesión.

Sesión 2. Razón o tasa de cambio en la variación lineal

Trabajen en parejas y resuelvan lo que se pide de acuerdo con los datos que se proporcionan.

α

1. Rodrigo y Daniel son atletas. Van a competir en una carrera de 100 m. En una práctica, corrieron a velocidad uniforme y se registró el tiempo contra la distancia de la carrera de cada uno. Se obtuvieron las siguientes rectas (gráfica 13.2).



Gráfica 13.2 Registro de la distancia recorrida según el tiempo transcurrido

a) ¿Quién corrió más rápido, Daniel o Rodrigo? ______

b) Cuando habían transcurrido 10 segundos, ¿qué distancia había recorrido cada uno? ______

c) ¿En cuánto tiempo hizo la carrera Daniel? ______

d) ¿A qué velocidad corrió Rodrigo? ______

e) ¿En cuántos segundos Daniel recorre 20 metros? ______

Problemas

Trabajen en parejas y resuelvan los problemas.

σ

2. En un comercio del aeropuerto se indica el precio de las mercancías en dos denominaciones, en pesos mexicanos y en dólares. Hoy Vicente compró un pantalón cuyo precio era $697.00 o 34 dólares.

a) En este día, ¿a cuántos pesos mexicanos equivale un dólar? ______

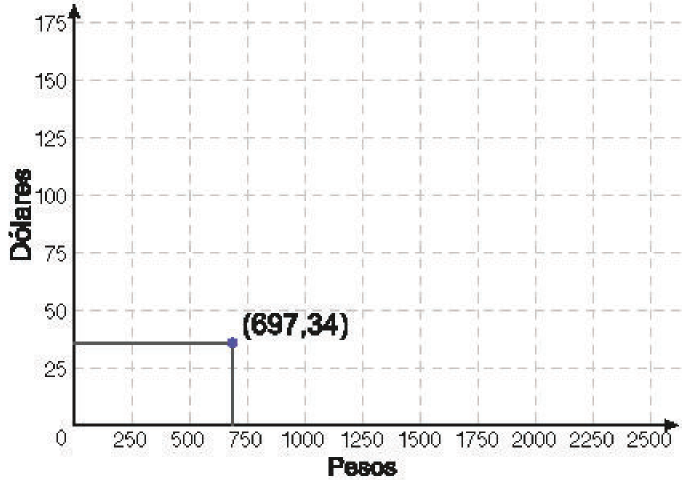
______

b) Completen la tabla 13.8 con tres equivalencias más entre pesos y dólares.

Tabla 13.8 Relación del peso con el dólar (tipo de cambio del 19 de junio de 2018)

Pesos (x)				697	2050
Dólares (y)				34	

c) En los ejes de coordenadas que se presentan a continuación (ver gráfica 13.3), tracen la representación gráfica de la relación que existe entre los pesos y los dólares a partir de los datos que aparecen en la tabla 13.8. Pueden redondear las cantidades.



Gráfica 13.3 Equivalencia entre pesos y dólares

d) Si x representa una cantidad en pesos y y la conversión a dólares, ¿cuál sería la ecuación que describe la relación entre los dólares y los pesos mexicanos, o la fórmula que permite convertir los dólares a pesos mexicanos? ______________

____

e) Para cualesquiera dos parejas de valores (x, y) de la gráfica 13.3, efectúen la división de la ordenada entre la abscisa, es decir, dividan la cantidad de dólares entre la cantidad de pesos correspondiente. ¿Qué representa el cociente obtenido? Expliquen. ______________

____

f) La representación gráfica de la relación entre pesos y dólares es una recta, la que une los puntos definidos por las parejas de valores de la tabla. Esta línea, ¿pasa por el punto (0, 0)? Justifiquen su respuesta. ______________

____

En primer grado se vio que una relación de variación lineal entre dos variables x, y satisface principalmente tres propiedades matemáticas.

a) El cociente $\frac{y}{x}$ (entre los valores x, y de la relación) es un valor constante, es decir,

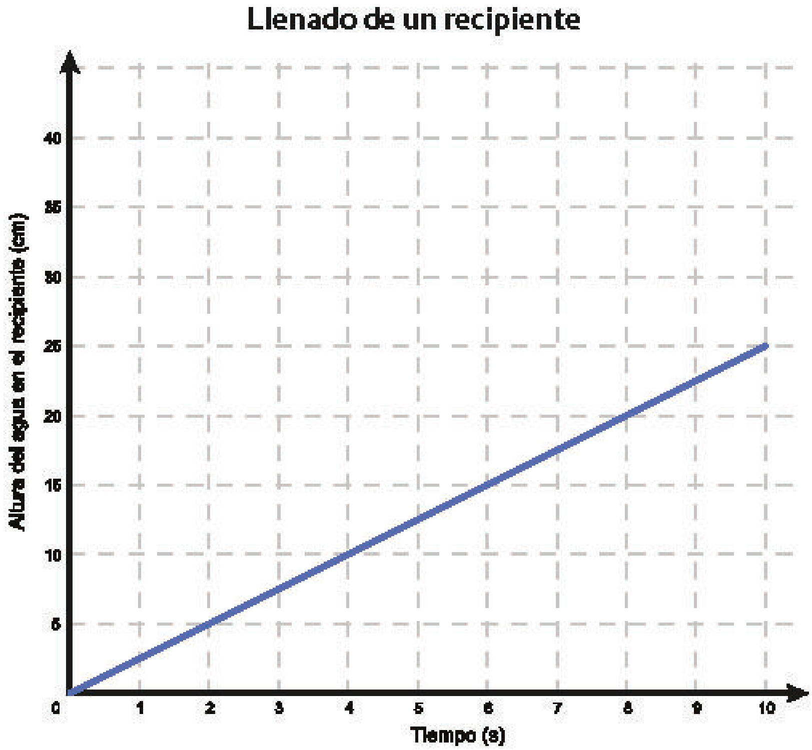
$$\frac{y}{x} = k$$

b) Cuando $x = 0$, se debe verificar que $y = 0$.

c) La representación gráfica de una variación lineal entre dos variables x, y, es una línea recta.

El cociente $\frac{y}{x}$ se llama razón de cambio entre las variables x y y en los contextos en los que existe una variación lineal.

3. Un recipiente cilíndrico vacío comienza a llenarse a partir de un momento dado con un flujo de agua a razón constante (misma cantidad de agua por un mismo periodo de tiempo). En la gráfica 13.4 se muestra el registro de la altura del agua en el recipiente, en cada instante de tiempo.



Gráfica 13.4 Registro del llenado de un recipiente

a) ¿Qué altura alcanza el nivel del agua a los 10 segundos? ______________________

b) Cuando el agua tiene una altura de 20 cm, ¿cuánto tiempo ha transcurrido? ______________________

c) ¿Cuál es la razón de cambio o velocidad de llenado del recipiente (en cm/s)? ______________________

d) ¿Cuál es la ecuación que describe el llenado del recipiente? ______________________

e) La situación descrita, ¿es de variación lineal? (Entre las variables x = tiempo que transcurre, y y = altura del agua según el tiempo transcurrido.) Justifiquen su respuesta. ______________________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Con ayuda del profesor lleguen a un acuerdo sobre la ventaja de tener información sobre la razón de cambio de una variación lineal entre dos variables x y y sobre la posibilidad de comparar las razones de cambio de dos variaciones lineales distintas, es decir, qué tipo de contrastación o de decisión permite tomar para conocer la razón de cambio de dos variaciones lineales distintas.

Actividad

4. Tracen en un mismo plano cartesiano la gráfica de las siguientes ecuaciones y respondan las preguntas.

- $y = 2x$
- $x = 2y$

a) ¿Qué diferencia hay entre las gráficas? ______________________

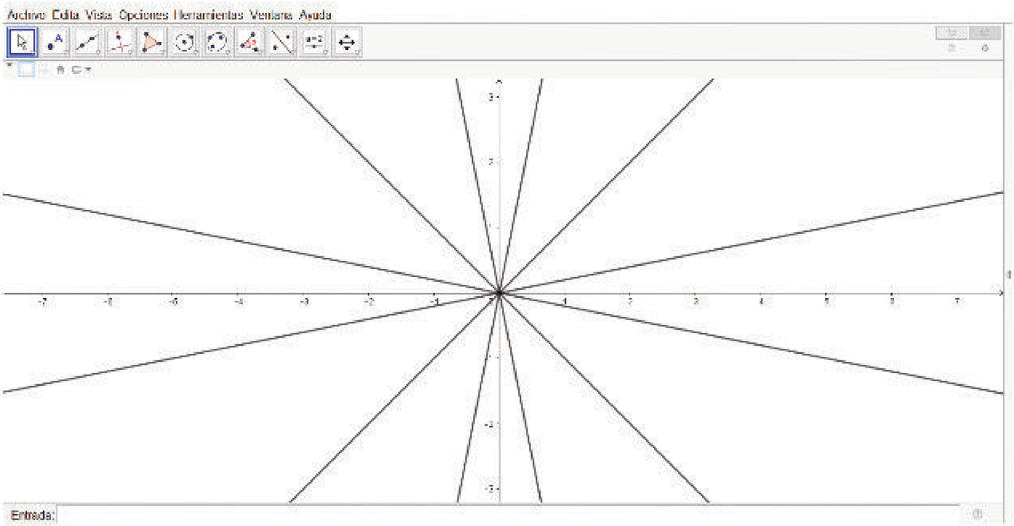
b) ¿Las relaciones entre x, y son de variación lineal? Justifiquen su respuesta.

____

5. En GeoGebra, tracen las gráficas de las relaciones entre las variables x, y que enseguida se especifican. Introduzcan cada ecuación en el espacio inferior de la pantalla del software, en el campo "Entrada:" y opriman "Enter".

i) $y = x$ ii) $y = -x$ iii) $y = 5x$ iv) $y = \frac{1}{5}x$ v) $y = -\frac{1}{5}x$

Obtendrán una pantalla como la siguiente.



a) Identifiquen en la pantalla a qué ecuación corresponde cada gráfica y únanla con una línea.

$\boxed{y = x}$ $\boxed{y = -x}$ $\boxed{y = 5x}$

$\boxed{y = \frac{1}{5}x}$ $\boxed{y = -\frac{1}{5}x}$

b) En GeoGebra, prueben con algunas ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{m}x$; después discutan cuáles son las similitudes y diferencias entre una recta de una ecuación de la forma $y = mx$ y las ecuaciones que graficaron; prueben dar valores para m sólo con números enteros (positivos y negativos).

c) En las rectas de las ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{m}x$, ¿qué sucede con la inclinación de la recta a medida que...

- incrementan los valores de m? ______
- disminuyen los valores de m? ______

6. Resuelvan individualmente.

En la tabla 13.9 se presenta una lista de enunciados. Escriban en su cuaderno un ejemplo que ilustre los conocimientos que recuerdan de grados o secuencias anteriores; luego escriban un número del 1 al 5 para calificar el grado en que están de acuerdo con cada enunciado, donde 1 significa "no estoy de acuerdo en absoluto", y el grado aumenta hasta llegar a 5 que significa "estoy totalmente de acuerdo".

Tabla 13.9 Calificación personal de las actividades efectuadas

Autorregulación

Enunciado	Calificación (de 1 a 5)
1. En las sesiones de trabajo sobre razón o tasa de cambio entre dos variables todo lo que vimos me pareció nuevo.	
2. En estas sesiones de matemáticas me di cuenta de que usamos conocimientos que aprendí en el curso de Matemáticas 1, o en una secuencia anterior, por ejemplo, la multiplicación de números positivos y negativos.	
3. En estas sesiones pude recuperar todo lo que había aprendido de matemáticas en grados anteriores.	
4. No recuerdo nunca nada de lo que aprendí de matemáticas de una clase a otra.	
5. Recuerdo mejor lo que entendí bien o con lo que fui capaz de trabajar de una clase a otra.	

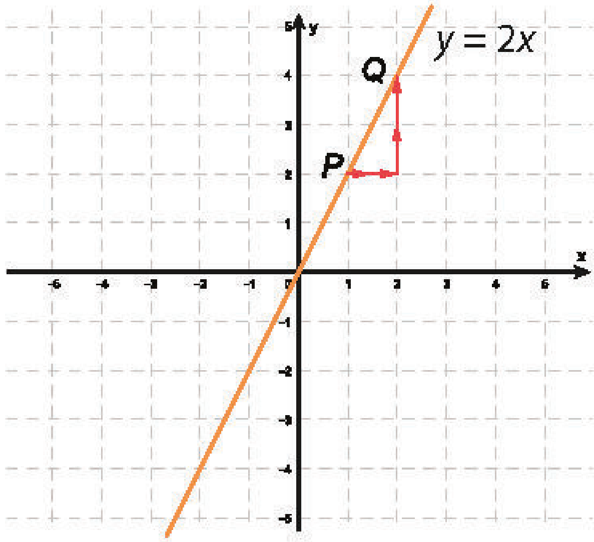
Sesión 3. Cálculo empírico de la pendiente de una recta

α

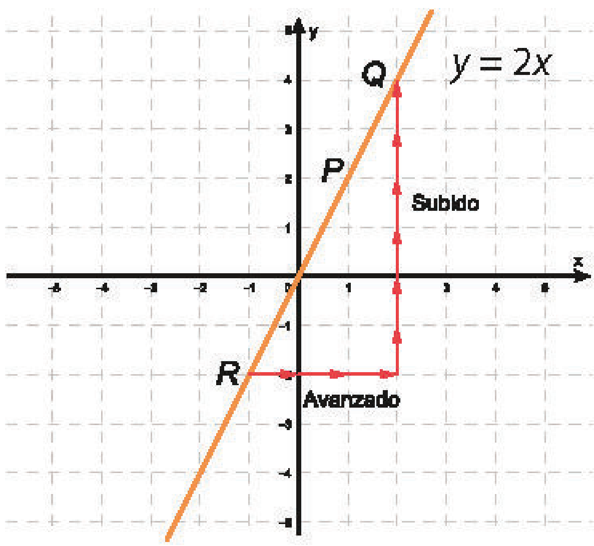
Actividad

Formen parejas para hacer lo que se pide.

1. Observen que en las dos gráficas que aparecen a continuación. Dados cualesquiera dos puntos *P* y *Q* en una recta se puede ir de uno a otro mediante dos movimientos consecutivos que llamaremos lo avanzado y lo subido. En las dos gráficas se tiene la recta $y = 2x$; en la gráfica 13.5 se Indiquen los puntos *P* y *Q*, y en la 13.6 los puntos *R* y *Q*. En ambas gráficas se señalan los movimientos de lo avanzado y lo subido para ir de un punto a otro:



Gráfica 13.5 Movimiento de dos puntos



Gráfica 13.6 Movimiento de dos puntos

Se quiere calcular el valor del cociente que se forma entre “lo subido” y “lo avanzado” en los dos casos que se señalan en las gráficas, de *P* a *Q* y de *R* a *Q*.

Por ejemplo, para ir de P a Q, el cociente de "lo subido" entre "lo avanzado", $\frac{\text{lo subido}}{\text{lo avanzado}} = \frac{2}{1}$, pues se puede observar en la gráfica 13.6 que "lo avanzado" vale una unidad y que "lo subido" vale dos unidades.

a) ¿Cuánto vale el cociente cuando se va del punto R al punto Q, en donde R y Q son los puntos que se muestran en la gráfica 13.6? ______________________

____

b) ¿Qué valor tendría el cociente para cualesquiera otros dos puntos sobre la recta $y = 2x$? ______________________

____

c) La relación entre lo subido y lo avanzado se puede expresar como una función lineal $y = kx$. ¿Coincide el valor del cociente con k? Expliquen su respuesta.

____

2. En su cuaderno tracen ejes coordenados que abarquen de −5 a 5 en cada eje (observen los ejes coordenados en la gráfica 13.5 de la actividad 1). Consideren una función lineal. Por ejemplo: $y = \frac{2}{3}x$.

a) Tracen su gráfica.

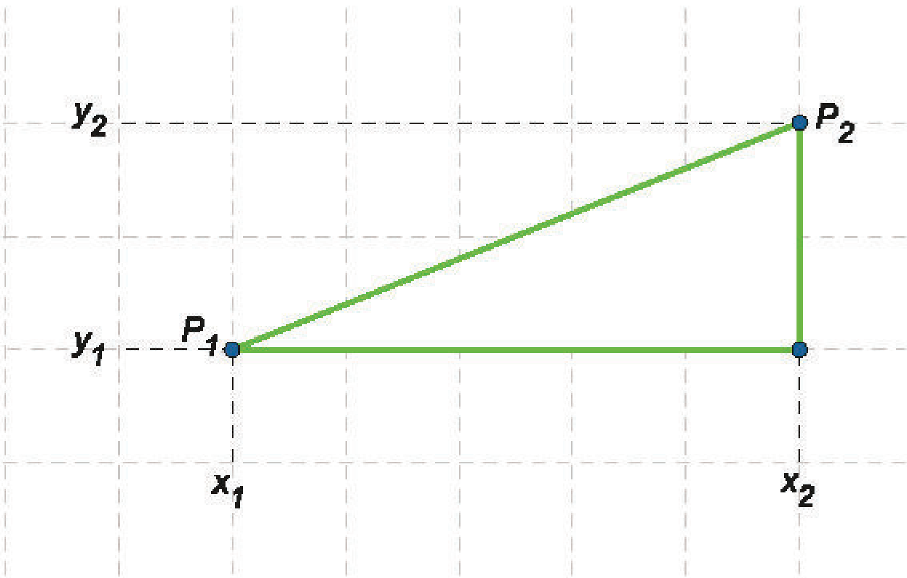
b) Ubiquen dos puntos de manera que puedan calcular el cociente de lo subido entre lo avanzado y calcúlenlo.

c) ¿Qué relación hay entre el cociente de dos puntos cualesquiera de la gráfica de la ecuación $y = \frac{2}{3}x$, con la constante de variación lineal de la ecuación dada?

____

____

3. Para obtener una expresión algebraica general para el cociente entre "lo avanzado" y "lo subido", observen la representación de dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, y $P_2 = (x_2, y_2)$ en un pedazo del plano como se muestra en la gráfica 13.7.



Gráfica 13.7 Representación de dos puntos en un plano

a) Expresen algebraicamente cuánto vale "lo subido" y cuanto "lo avanzado" en términos de los valores x_1, y_1, x_2, y_2 que de manera general se han dado a las coordenadas de los puntos P_1 y P_2. ______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Con ayuda de su profesor(a) lleguen a un acuerdo sobre las respuestas correctas.

4. Formen equipos y realicen lo que se pide.
Tracen en papel milimétrico un par de ejes cartesianos para construir la gráfica de la ecuación $y = \frac{1}{3}x$.

a) En el mismo plano, tracen las gráficas de las ecuaciones siguientes.

i) $y = \frac{1}{3}x - 4$

ii) $y = \frac{1}{3}x - 2$

iii) $y = \frac{1}{3}x + 2$

iv) $y = \frac{1}{3}x + 4$

b) ¿Qué observan en las rectas que trazaron en los incisos anteriores respecto a su inclinación?

______

En otras palabras

La pendiente de una recta se relaciona con la inclinación que tiene respecto al eje horizontal. Entre más cercana a la horizontal es una recta su pendiente se aproxima a cero. Si la recta es próxima al eje vertical la pendiente es muy grande. En una ecuación de la recta de la forma $y = mx + b$, pendiente es el coeficiente m de la variable x.

c) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que representa la ecuación $y = \frac{1}{3}x$?

______

d) ¿Cuál es el valor de la pendiente en los casos de las ecuaciones afines dadas en el inciso **a**? ______

e) Comparen el valor de la pendiente de la recta $y = \frac{1}{3}x$ con el de cada una de las rectas del inciso **a**. ¿Qué encuentran? ______

f) ¿En qué valor interseca la gráfica $y = \frac{1}{3}x$ al eje y? ______

g) Cada una de las rectas trazadas, a partir de las ecuaciones en el inciso **a**, interseca al eje y, ¿en qué valor de y ocurre la intersección de la recta de la ecuación del inciso i? ______

h) ¿En qué valor de y la recta de la ecuación del inciso **ii** interseca al eje y?

______

i) Observen qué ocurre en la intersección de las rectas con el eje y, en el caso de las ecuaciones **iii** y **iv**.

- La recta **i** interseca al eje y en el valor: ______________________
- La recta **ii** interseca al eje y en el valor: ______________________

j) Elaboren una conjetura general acerca del valor en el que interseca al eje y la representación gráfica de la ecuación $y = mx + b$. ______________________

____

Dada la gráfica de una recta en un sistema coordenado, o de ejes cartesiano, se llama **ordenada al origen** al punto de intersección de la recta con el eje Y (eje vertical).

5. Grafiquen las siguientes ecuaciones. Comprueben que sus gráficas son correctas tomando las coordenadas de dos puntos de cada gráfica y comprobando que cumplen la ecuación correspondiente.

i) $y = 2x - 4$

iii) $y = \left(\frac{1}{3}\right)x + 3$

ii) $y = \left(-\frac{2}{3}\right)x + 2$

iv) $y = -3x + 4$

a) ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas dadas? ______________________

b) ¿Cuál es la ordenada al origen de cada recta? ______________________

c) ¿En qué lugar aparece el valor de la pendiente en las ecuaciones de la forma $y = mx + b$? Den argumentos que justifique su respuesta. ______________________

____

d) ¿Qué relación hay entre la ordenada al origen y el término independiente b en la forma general de la ecuación: $y = mx + b$? ______________________

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. En caso de dudas sobre la corrección de las respuestas, consulten a su profesor.

Retomando una mirada previa

Trabajen en parejas.

1. Regresen al problema de la sección *Una mirada previa*. Revisen sus respuestas y si es necesario corríjanlas.

a) ¿Qué tipo de relación existe entre la velocidad del tren y el tiempo transcurrido? ______________________

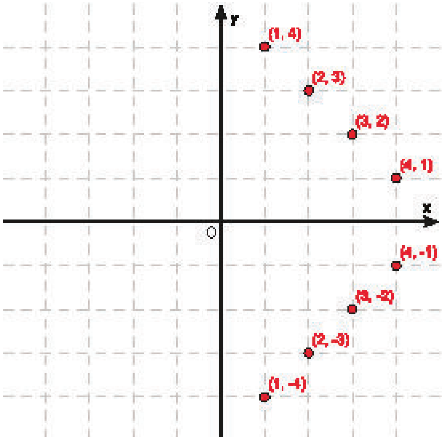
b) Analicen las ecuaciones para las distintas velocidades ahí mencionadas. ¿Qué pasa con la pendiente a medida que aumenta la velocidad? ______________________

c) ¿Qué sucede con la ordenada al origen? ______________________

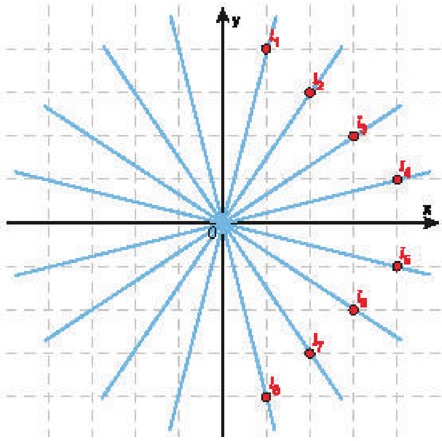
2. Formen equipos y hagan lo que se pide.

Para poder trazar las rectas de la gráfica 13.9, primero se ubicaron los puntos en el sistema coordenado que aparece en la gráfica 13.8; después se trazaron ocho rectas que pasan por el origen y por cada uno de los puntos ya graficados.

a) Completen la tabla 13.10 con la pendiente y ecuación de cada recta de la gráfica 13.9.



Gráfica 13.8 Localización de puntos en el plano



Gráfica 13.9 Trazo de rectas a partir de puntos localizados

Tabla 13.10 Ecuación y pendiente de varias rectas que pasan por el origen

Recta	Pendiente	Ecuación
L1		
L2		
L3		
L4		

Recta	Pendiente	Ecuación
L5		
L6		
L7		
L8		

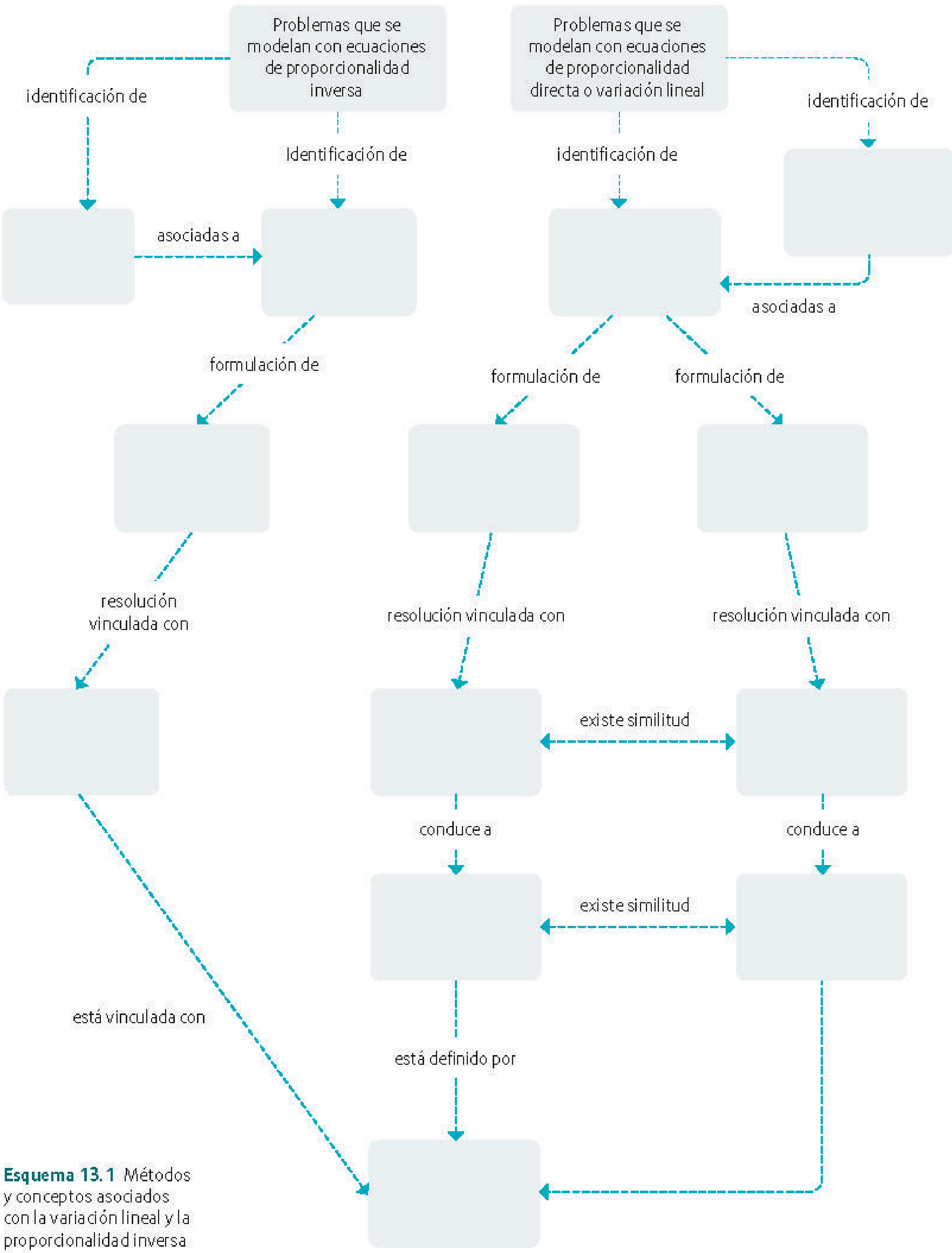
* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si resulta que las soluciones son distintas, revísenlas y argumenten la corrección de su procedimiento de solución. En caso de persistir dudas, consulten a su profesor.

En retrospectiva

En esta secuencia se abordaron los conceptos enlistados a continuación.

- Producto constante entre las dos variables.
- Representación gráfica de la proporcionalidad inversa.
- Dos variables x, y.
- Ecuaciones de variación proporcional directa o variación lineal: $y = mx$.
- Representación gráfica de la proporcionalidad directa o variación lineal
- Cálculo de la pendiente.
- Dos variables x, y.
- Cociente constante entre las variables
- Representación gráfica de la variación afín.
- Ecuaciones de proporcionalidad inversa: $xy = k$.
- Soluciones de la ecuación o puntos por donde pasan las líneas trazadas.
- Ecuaciones de variación afín: $y = mx + b$.
- Cálculo de la pendiente.

En el esquema 13.1 coloquen los conceptos de la lista en un recuadro de modo que el mapa conceptual sea coherente, es decir, que informe fidedignamente sobre las relaciones entre los conceptos y procedimientos desarrollados en esta secuencia.

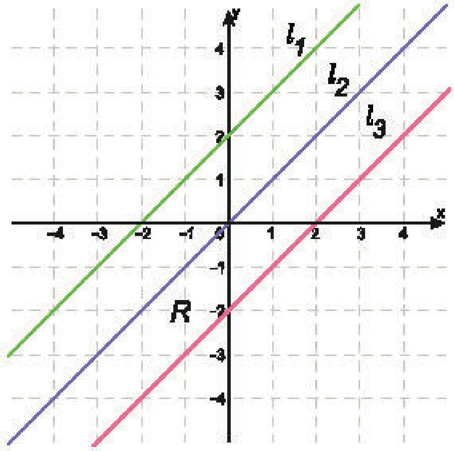


Esquema 13.1 Métodos y conceptos asociados con la variación lineal y la proporcionalidad inversa

¿Qué aprendí?

Respondan individualmente.

1. Analicen las rectas trazadas en la gráfica 13.10 y respondan las preguntas.



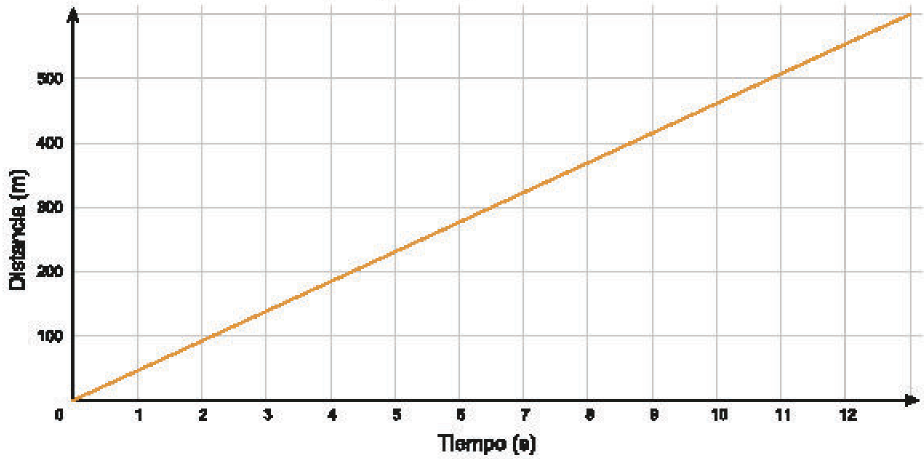
Gráfica 13.10 Trazo de rectas

a) ¿Cuál es la pendiente de cada recta? ____________

b) ¿Cuál es la ordenada al origen de cada una? ____________

c) Con los valores tanto de la pendiente (m) como de la ordenada al origen (b), escriban la ecuación de cada una de las rectas. ____________

2. En la gráfica 13.11 se representa la relación entre el tiempo y la distancia recorrida de un móvil. Analícenla y hagan lo que se indica.



Gráfica 13.11 Relación entre tiempo y distancia recorrida

a) Estimen aproximadamente la distancia recorrida del móvil en cada uno de los primeros 7 segundos y llenen con estos datos la tabla 13.8.

Tabla 13.8 Relación entre tiempo y distancia recorrida

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7
d(m)								

b) ¿Cuál es la velocidad del móvil? ____________

c) Escriban la ecuación que relaciona la distancia (d) respecto al tiempo (t). ____________

3. El tiempo para desalojar un tanque de agua y el diámetro del agujero por el que se desahoga (en centímetros) son cantidades inversamente proporcionales. Si el agujero tiene de radio 1 cm, el tanque tarda 1 440 minutos (un día) en vaciarse.

   a) Si el orificio mide 2.5 mm de radio, ¿cuánto tardará el tanque en vaciarse?

   ____

   b) ¿Cuánto debe medir el radio del orificio para que el tanque se vacíe en 160 minutos? ______________________________

4. Cuatro pintores tardan 10 días en pintar una pared, ¿cuánto tardarán ocho en hacer el mismo trabajo? ______________________________

   a) Completen la tabla en la que se analiza la variación entre el número de pintores y los días que trabajan.

Número de pintores	1	2	3	4	5	6	7	8
Días para pintar la pared				10				

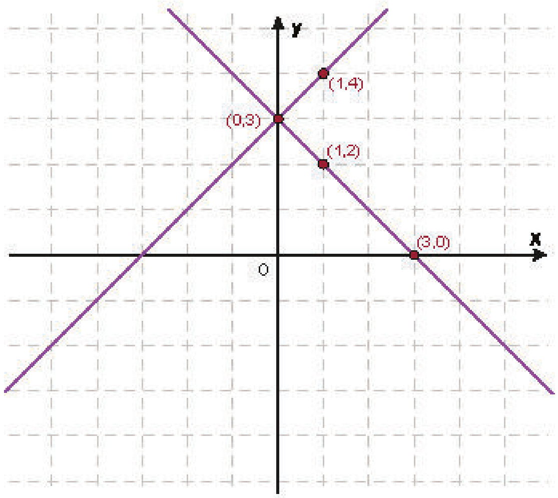
   b) ¿Qué sucede con los días cuando el número de trabajadores disminuye? ______
   c) ¿Tiene sentido preguntarse qué sucede con cero trabajadores? ______________
   d) ¿Tiene sentido preguntarse qué sucede en cero días? ¿Por qué? ______________
   e) ¿Qué tipo de relación hay entre el número de trabajadores y los días que tardarían en pintar la pared? ______________________________
   f) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? ______________________________
   g) Grafiquen la relación. ¿Qué tipo de gráfica es? ______________________________

5. En los ejes coordenados o plano cartesiano que aparece en la gráfica 13.12, se han trazado dos rectas. La primera pasa por los puntos (0, 3) y (1, 4); la segunda pasa por los puntos (3, 0) y (1, 2).

   a) Determinen la pendiente de cada recta. ______________________________

   b) Indiquen cuál es la intersección de cada recta con el eje *y*. ______________________________

   c) Escriban la ecuación de cada recta. ______________________________



Gráfica 13.12 Intersección de dos rectas

* Reúnanse con un compañero para revisar las respuestas de esta sección. Si hay discrepancias, intenten encontrar en dónde está el error. Si aún persiste la duda, reúnanse con otra pareja para dilucidar cuál es la respuesta correcta.

Expliquen los procedimientos que usaron para resolver los problemas, si el procedimiento de alguno de ustedes fue distinto explíquenlo también.

Si persiste alguna duda, compártanla con su profesor para que los oriente y avancen en resolverla.

BLOQUE 2

S14 Múltiplos y submúltiplos de medidas de longitud, capacidad y masa

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (pulgada, galón, onza y libra).

Trabaja individualmente

1. Pablo es boxeador amateur y ha ido a un torneo a Estados Unidos de América. Al medir su masa, la báscula marca 75 kg y unos segundos después, 165.2 lb. Él sabe que la segunda marca está en libras, una unidad de medida de masa del Sistema Inglés.

   a) ¿A cuánto equivale una libra en kilogramos? Usen tres cifras decimales. Expliquen qué operación hicieron para responder.

   ____

   ____

   ____

Sesión 1. Unidades de medida del Sistema Internacional de Medidas y el sistema inglés

α

Actividad

Trabajen individualmente.

1. Lorenzo necesita medir objetos para una tarea, pero sólo tiene una regla. Quiso medir su juguete favorito y lo colocó como se muestra en la figura 14.1.

Figura 14.1 Medición de objetos

   a) Observen la imagen y escriban (en centímetros) cuánto mide el largo del camión de Lorenzo. ______________________________

   b) ¿Cuánto mide en milímetros? ______________________________

c) Expliquen cómo se efectúa la conversión de centímetros a milímetros.

d) ¿Conocen una manera simplificada de hacerlo? Si es así, descríbanla.

e) En la caja del juguete dice que el camión mide 7.7 in. En el sistema inglés, una unidad de medida de longitud es la pulgada (in). ¿A cuánto equivale una pulgada en centímetros? ______
f) Lorenzo encontró en internet que una pulgada es igual a 2.54 cm. ¿Alguno de ustedes obtuvo esa respuesta? ______
g) ¿Consideran que hay un error en la medición que hicieron o a qué se debe la diferencia?

* Comparen sus resultados de la actividad previa. Comenten sobre las diferencias que encuentren, si son grandes o pequeñas, si están a nivel de centímetros o de una unidad más pequeña, a qué consideran que esto se debe y qué tanto margen de diferencia se puede considerar una buena aproximación.

Trabajen en parejas.

2. La caja en la que venía el camión de Lorenzo mide 7.7 in porque el producto viene de los Estados Unidos donde usan otro sistema de medidas llamado Sistema Inglés.
   a) Conviertan a centímetros la medida que viene en la caja del camión de Lorenzo. Redondeen el resultado a una cifra decimal. ______
   b) Comparen su resultado con la medición que hicieron del camión en la actividad 1 inciso a.
   c) Si la diferencia entre su medida y la conversión es de una décima o menos seguramente la diferencia se debe al redondeo. Si es mayor de una décima puede haber un error de procedimiento. Revisen lo que hicieron en ambas para encontrar el origen del error. ______

Dos de las unidades de longitud en el Sistema Inglés son la pulgada y la milla. La abreviatura para pulgada es in y para milla es mi. Una pulgada es igual a 2.54 cm; si su regla escolar tiene escala en pulgadas pueden verificarlo ahí. Una milla equivale a 1.61 km.

3. Adela va a ir de viaje a San Francisco con unos amigos y piensan ir por carretera a partir de San Diego. En internet encontraron que de San Diego a San Francisco hay 502 millas por la carretera I-5 N. En otro sitio dice que la distancia entre estas dos ciudades es de 808 km por la misma carretera.

   En este caso, por ser unidades de medida para distancias grandes, se usará sólo la parte entera del resultado de las conversiones.

   a) ¿Alguna de las informaciones sobre la distancia entre estas dos ciudades es errónea? ____________________
   b) Después de recorrer 150 millas los amigos hicieron una parada para comer. ¿Cuántos kilómetros les faltan por recorrer? ____________________
   c) ¿Qué distancia deben recorrer para encontrase a 100 km de su destino? ____________________

El **Sistema Internacional de Medidas** (o SIM, por sus siglas) es el sistema oficial de medidas de todos los países del mundo, con excepción de Estados Unidos de América, Liberia y Birmania. En estos países el sistema oficial es el Sistema Inglés, el cual fue impuesto por Gran Bretaña en sus colonias.

La unidad base del SIM es el metro. El **metro** es la unidad base de longitud pero también sirve como parámetro para las unidades de otras magnitudes, como el volumen.

Se denomina **múltiplos del metro** a las unidades de longitud, derivadas del metro y más grandes que éste.

Los **submúltiplos del metro** son las unidades de longitud derivadas del metro y más pequeñas que éste.

Los múltiplos y submúltiplos del metro aumentan y disminuyen de 10 en 10, el SIM es un sistema base 10.

4. Completen las equivalencias de múltiplos y submúltiplos del metro.

   a) 1 m = ____________ dm
   b) 1 dm = 10 ____________
   c) 1 cm = 10 ____________
   d) 1 m = ____________ cm
   e) 1 m = ____________ mm
   f) 1 dm = ____________ m
   g) 1 cm = ____________ m
   h) 1 mm = ____________ m

5. En la tabla 14.1 se presentan los nombres de animales de diferentes partes del mundo y su tamaño promedio de largo, las cuales se han registrado usando distintas unidades del SIM o del SI. Completen las dos columnas correspondientes al SIM. Para la conversión a pulgadas usen la calculadora.

Tabla 14.1 Tamaño promedio de algunos animales

Animal	Largo en centímetros	Largo en pulgadas
Musaraña	5	
Ciervos pudúes		
Elefante		417
Tortuga laúd	200	

ω

6. Al hacer mediciones la unidad es muy importante.
   a) Comparen los números 200 y 7 874. ¿Cuál es mayor? ____________
   b) Comparen las medidas 200 cm y 7 874 in. ¿Cuál es mayor? ____________
   c) ¿Cuál unidad de medida es mayor: una pulgada o un cm? ____________
   d) Completen el enunciado con las palabras mayor y menor.

El número resultante de una medición es ____________ cuando la unidad es ____________.

* En sesión grupal, hagan una tabla en la que simplifiquen las equivalencias de unidades de longitud del SI, estudiadas en esta sesión, con las unidades del SIM.

Sesión 2. Unidades de medida de capacidad del SIM y SI

α

Actividad

Trabajen en parejas.

1. En esta actividad necesitarán cartón rígido, regla, tijeras y cinta canela.
   a) Construyan un cubo de cartón de 1 dm de arista, denominado decímetro cúbico, y otro de papel de 1 cm de arista, denominado centímetro cúbico. Refuercen las aristas del dm^3 con la cinta canela. Conserven los cubos ya que se usarán en la sesión 3.
   b) ¿Recuerdan cuál es la capacidad del decímetro cúbico? Escríbanla. ____________
   c) Tomen el centímetro cúbico. ¿Cuántas veces cabe en el decímetro cúbico? ____________
   d) ¿Qué parte de un litro es un centímetro cúbico? ____________

Trabajen en parejas. Lean la información siguiente y hagan lo que se pide.

Los **prefijos** kilo, hecto, deca, deci, centi y mili provienen del griego, se anteponen a las unidades básicas del SIM, para denotar sus múltiplos y submúltiplos.

2. Escriban en la tabla 14.2 el significado de cada uno de los prefijos que ahí se presentan.

Tabla 14.2 Los prefijos en las medidas

Prefijo	Significado
kilo	
hecto	
deca	
deci	
centi	
mili	

a) Escriban los nombres de los submúltiplos del litro y sus equivalencias, usando los prefijos de la tabla anterior.

____

____

____

Problemas

3. Resuelvan individualmente los problemas.

a) Ana vive en Estados Unidos de América. Tiene una taza de medidas en mililitros, cuya máxima capacidad es 250 ml. Ella compra un envase de un galón de leche y lo mide con la taza, resultan 15 tazas y sobran 50 ml. ¿A cuántos litros corresponde 1 galón? ______________________________

b) El auto de Ana se llena con 13.16 gal de gasolina, ¿cuál es la capacidad del tanque en litros? Usen el resultado del problema anterior. ______________

____

c) Una cisterna en la fábrica en la que trabaja el esposo de Ana tiene una capacidad de 10 000 L. ¿Cuántos galones son? ______________________

____

4. En la tabla 14.3 aparece la cantidad de agua requerida para producir algunos alimentos según datos de la FAO. Completen las columnas correspondientes a unidades del SIM usando el método simplificado para trabajar con productos y divisiones de múltiplos de 10. Usen su calculadora para la columna de galones.

Tabla 14.3 Cantidad de agua requerida para la producción de alimentos

Sustancia y cantidad	L	ml
1 taza de café		
1 manzana		
1 vaso de leche	200	
1 hamburguesa	2400	
1 rebanada de pan		40 000

El galón es una medida de capacidad del Sistema Inglés. Su abreviatura es gal.
1 galón = 3.8 litros.

En otras palabras

FAO. Organización para la comida y la agricultura de las Naciones Unidas (por sus siglas en inglés: United Nations Food and Agriculture Organization)

* Reúnanse para comparar las respuestas que obtuvieron en esta sesión. Si no coinciden, revisen su procedimiento y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre la respuesta correcta.

Visiten el sitio: www.fao.org/assets/infographics/FAO-Infographic-Virtual-Water-es.pdf (Consulta: 29 de junio de 2018.) y conozcan la cantidad de agua necesaria para producir otros alimentos.

Sesión 3. Unidades de medida de masa del SIM y SI

Actividad

Trabajen en parejas.

1. En esta actividad necesitarán, además de los cubos que construyeron para la actividad 1 de la sesión 2, una bolsa de plástico grande que no tenga agujeros y una báscula.

   Coloquen la bolsa de plástico forrando el cubo de 1 dm de arista por dentro; traten de que quede lo más estirada posible y que no se rompa, porque le van a echar agua. Si la bolsa es suficientemente grande, no necesitan pegarla a la caja. Viertan agua en la bolsa dentro de la caja hasta que se ocupe todo el espacio del cubo y sin que se derrame.

   a) ¿Cuánta agua cabe en el cubo? ______________________

   b) Tomen la bolsa con el agua, háganle un nudo y midan su masa con la báscula. Un representante de cada equipo pase al pizarrón y escriba la masa de su bolsa de agua. ¿Qué observan?

   ____

   ____

σ

En el SIM, la unidad base para medir la masa, es el kilogramo. El **kilogramo**, cuya abreviatura es kg, es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo, adoptado por la tercera Conferencia General de Pesas y Medidas en 1901.

Antiguamente, un kilogramo era la masa de un litro de agua destilada a 1 atmósfera de presión y 3.98 °C, pero con el tiempo se le han hecho ajustes a las definiciones de todas las unidades del SIM.

La **tonelada** es una unidad de medida de masa que equivale a 1000 kg y su abreviatura es ton.

2. Completen los espacios vacíos, respondan la pregunta y completen la tabla.

a) Como indica su nombre, 1 kilogramo = ________________ gramos.

b) El gramo se abrevia ____________ y es la milésima parte de un kilogramo.

c) ¿A cuántos gramos equivale la masa de un mililitro de agua? ____________

d) Completen la tabla 14.4 de equivalencias; a veces deben insertar un número y a veces el nombre de una unidad. Para las partes menores a 1 den su respuesta en fracción decimal y en número decimal.

Tabla 14.4 Medidas y sus equivalencias

Unidad	Equivalencias
kilogramo	________ gramos
gramo	________ kilogramos
1 miligramo	$\frac{1}{1000}$ = 0.001 ________

3. Un paquete de chocolates importados dice: 3 lb y también 1.36 kg.

a) ¿A cuánto equivale 1 libra? ________________________________

b) Vuelvan a la sección *Una mirada previa* al inicio de esta secuencia. ¿Alguno de ustedes obtuvo la misma equivalencia para la libra? Expliquen. ____________

____

____

* Comparen sus resultados, vuelvan a resolver el problema y comenten a qué se deben las diferencias que hayan encontrado, si fue el caso. Después, lean la información y hagan lo que se pide.

Unidades de masa del Sistema Inglés

Las medidas de masa más comunes en el Sistema Inglés son la onza y la libra.

1 libra = 16 onzas

La abreviatura de onza es oz y, de libra, lb.

4. Obtengan las equivalencias en las unidades del SIM, señaladas en la segunda columna de la tabla 14.5, de las unidades del Sistema Inglés que aparecen en la primera columna de la misma tabla. Pueden usar su calculadora. Redondeen sus resultados a una cifra decimal; para la libra usen la equivalencia del primer renglón de la tabla 14.5.

Tabla 14.5 Equivalencias de la onza y la libra

SI	SIM
1 lb	
1 oz	

5. Completen las equivalencias que faltan en la tabla 14.6, usen el método simplificado para las equivalencias entre SIM y su calculadora para pasar de un sistema a otro o dentro del SI.

Tabla 14.6 Equivalencias entre SIM y SI

Objeto	mg	g	kg	oz	lb
Un jaguar					0.25
Un lápiz		7			
Un balón de fútbol al inicio de un partido	410 000				
Un bebé recién nacido			2.8		
Un auto compacto					2 400

6. En la columna derecha, califiquen como verdadera o falsa la aseveración que aparece en la columna izquierda, según su experiencia.

Autoconocimiento

Aseveración	Calificación
Ya había estudiado en la escuela algunas unidades del sistema inglés.	
Ya conocía las unidades del sistema inglés porque algunos productos que se consumen en mi casa traen esas unidades.	
Nunca había escuchado sobre las unidades del sistema inglés.	
El sistema internacional me parece más fácil de comprender que el sistema inglés.	
El sistema inglés me parece más fácil de comprender que el sistema internacional.	
Comprendo los dos sistemas y puedo hacer transformaciones entre ellos con facilidad.	

* Con otra pareja revisen las respuestas y resultados que obtuvieron. Comparen las respuestas de esta sesión. Si hay dudas, revisen las operaciones con sus calculadoras para rectificar los resultados.

Sesión 4. Problemas de conversiones entre unidades

α

1. Analicen las tablas en cuanto a cómo se hacen conversiones de una unidad menor a una mayor dentro del Sistema Inglés y cómo se hacen conversiones de una unidad a otra entre sistemas. Específicamente, expliquen cómo convertir pulgadas a centímetros y viceversa, galones a litros y litros a galones, libras a kilogramos y viceversa.

Problemas

σ

Sigan trabajando en parejas para resolver los siguientes problemas. Pueden usar la calculadora. Redondeen sus resultados a una cifra decimal, pero usen en las operaciones con las cifras decimales que se indicaron en las tablas de equivalencias de las sesiones 1 y 2 de esta secuencia.

1. Marina rentó un auto en Estados Unidos de América cuyo marcador de velocidad está en millas. A Marina le gusta manejar en carretera máximo a 120 km/h. ¿A qué velocidad corresponde esa velocidad en mi/h? ______________

2. Las rodadas de bicicletas corresponden al diámetro de sus llantas y mundialmente se miden en pulgadas. A León le compraron una bici rodada 16 por su cumpleaños.
   a) ¿Cuánto mide el diámetro de las ruedas de su bici en centímetros?
   ____
   b) Obtengan las rodadas, en centímetros, de las bicicletas infantiles más comunes: 12, 20 y 24 in. ______________

3. Ramón pone 12 gal de gasolina para llenar el tanque de su auto en California. ¿Cuántos litros puso Ramón? ______________

4. En Estados Unidos de América, la masa promedio de un niño o una niña de 13-14 años es de 102 lb. ¿A cuántos kilogramos equivale esa masa? ______________

ω

5. La masa de una taza de azúcar es de 200 gramos.
   a) ¿Cuántas onzas tiene una taza de azúcar? ______________
   b) ¿Cuántas libras tiene una taza de azúcar? ______________
   c) Una receta requiere $\frac{3}{4}$ taza de azúcar. ¿Cuántos gramos son? ______________
   d) Una receta requiere 2.2 lb de azúcar. ¿Cuántas tazas de azúcar son?
   ____
   e) ¿Cuál es la masa en onzas de $\frac{3}{4}$ de taza de azúcar? ______________

* Reúnanse con otra pareja y revisen sus respuestas a todas las actividades y problemas de la sesión. Cuando haya discrepancias, traten de dilucidar si ambas respuestas tienen sentido en el contexto del problema. Si aún hay dudas, consulten a su profesor.

Retomando una mirada previa

Comparen el resultado del problema 3 de la página 194 con el que obtuvieron en la sección *Una mirada previa*. ¿Son iguales? ______________________________

Si hay diferencia, ¿es mayor, menor o igual a 1 gramo? ______________________

Vuelvan a resolver el problema de la sección *Una mirada previa* con la calculadora y redondeen a tres cifras decimales; escriban el resultado aquí:

1 libra = ______________ kg

Ésta es la equivalencia entre libras y kilogramos.

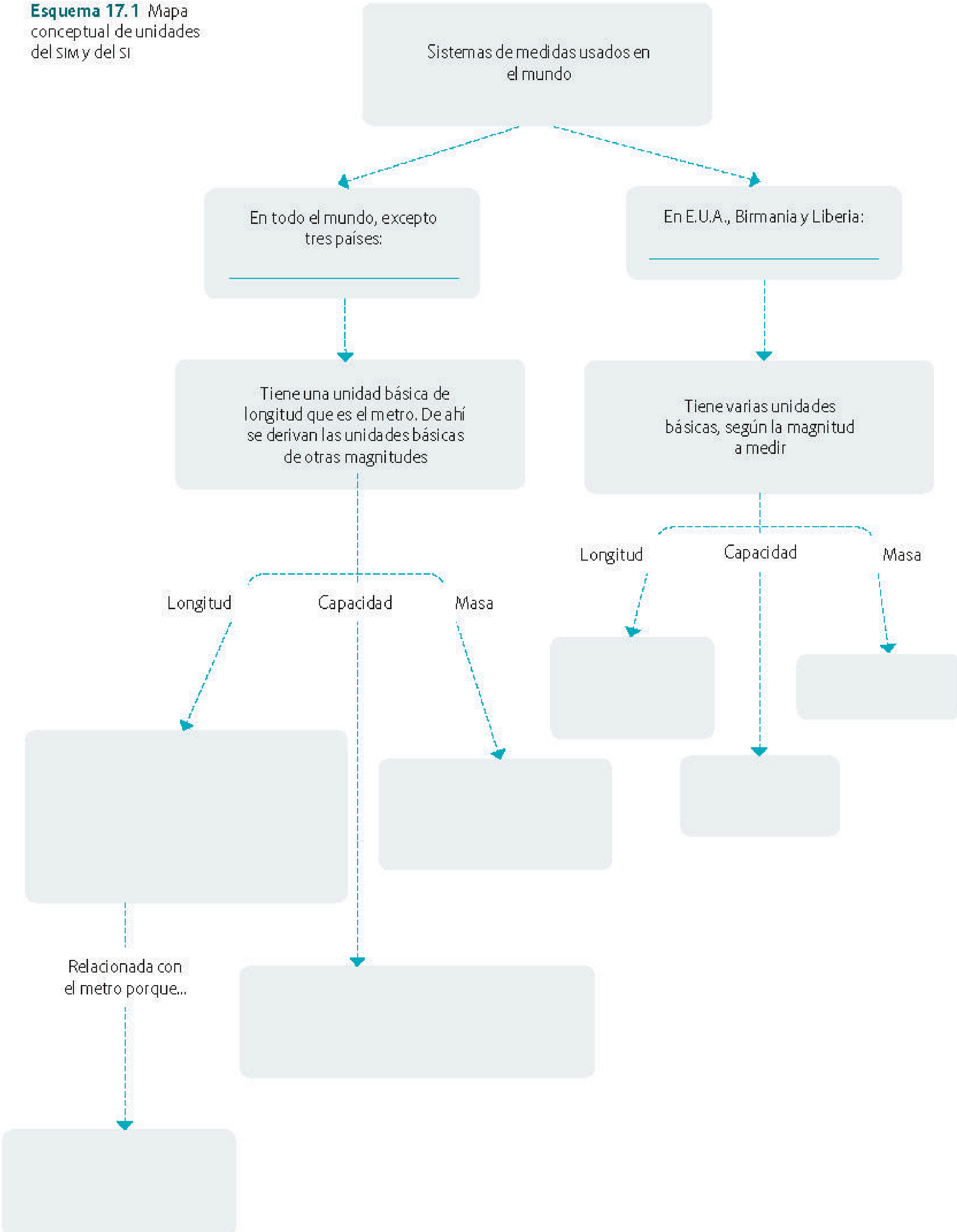
En retrospectiva

En esta secuencia de tres sesiones, se ha estudiado los siguientes temas.

- Sistema Internacional de Medidas (SIM).
- Cuya unidad base es el metro.
- Sistema Inglés de medidas (SI)
- Unidades de longitud del SIM. Múltiplos y submúltiplos del metro y sus equivalencias, por ejemplo: 1 km = 1 000 m; 1 m = 100 cm = 1 000 mm.
- Unidades de capacidad del SIM y equivalencias, por ejemplo: 1 L = 1 000 ml. (Relacionada con el metro porque 1 L es la capacidad de 1 dm^3.)
- Unidades de masa. Múltiplos y submúltiplos del kilogramo y sus equivalencias, entre otros: 1 g = $\frac{1}{1000}$ kg; 1 ton = 1 000 kg.
- Unidades del Sistema Inglés de medida y sus equivalencias en el SIM.
- Unidades de longitud. 1 in = 2.54 cm; 1 mi ≈ 1.61 km.
- Unidades de capacidad. 1 gal ≈ 3.8 L.
- Unidades de masa. 1 libra ≈ 454 g.

En el esquema 17.1 de la página siguiente hay rectángulos vacíos que deben llenarse. Coloquen cada concepto de la lista en cada uno de ellos, de manera que el mapa conceptual sea coherente, es decir, que informe fidedignamente sobre las relaciones entre los conceptos .

Esquema 17.1 Mapa conceptual de unidades del SIM y del SI



¿Qué aprendí?

1. En este problema pueden usar calculadora. Redondeen las respuestas a una cifra decimal.

   Marcia tiene una mesa y un sofá cama que le va a vender a su amiga Melanie que es norteamericana. Ayuden a Marcia convirtiendo todas las medidas al sistema inglés para que pueda mandarle las dimensiones a Melanie en el sistema que ella conoce.

Tabla 14.7 Medidas de los muebles de Marcia

Mueble	Largo	Ancho	Largo (in)	Ancho (in)
Mesa	1.20 m	0.40 m		
Sofá-cama abierto	180 cm	1.60 m		

2. Juan debe tomar 25 ml de medicamento cuatro veces al día. ¿Cuántos litros de medicamento tomará en los 15 días que dura su tratamiento? ______

3. En un hospital se deben administrar 150 ml diarios de suero intravenoso a un paciente. Las botellas de suero vienen en litros. Si se gastaron 1.2 L de suero en el paciente, ¿cuántos días estuvo recibiendo suero? ______

4. A un laboratorio llegan sustancias importadas en barriles de 20 galones. Con ella se llenan botes de 750 ml. ¿Cuántos botes se llenan con un barril? ______

5. Un oso polar macho tiene una masa promedio de una tonelada mientras que una hembra de la misma especie tiene la mitad. ¿Cuál es la masa de cada uno en kilogramos? ______

6. Una ballena azul come 7 900 lb de alimento diariamente. ¿Cuántos kilogramos de alimento son? ______

7. La ciudad de México produce 14 000 ton de basura diariamente. Nueva York produce 192 000 000 de lb de basura al día. ¿En qué ciudad se produce más basura? Expliquen su respuesta. ______

* Reúnanse con una compañera o compañero y entre los dos resuelvan los problemas de esta sección. Cuando haya discrepancias, háganse preguntas para asegurarse de que las respuestas sean congruentes.

Evaluación. Bloque 2

1. A Hortensia le pagan $240.00 por imprimir 500 volantes. Ella necesita juntar $1080.00. ¿Cuántos volantes necesita imprimir para cobrar esa cantidad?

2. Se necesita que cuatro camiones iguales hagan 12 viajes en total para transportar una mercancía. Se descompone un camión antes del primer viaje y los restantes deben transportar la misma mercancía. ¿Cuántos viajes deben hacer?

3. Algunos autobuses tienen seis ruedas, mientras que los autos tienen cuatro. En un descanso en la carretera hay 60 vehículos estacionados entre autobuses y autos. Juan contó un total de 260 ruedas. ¿Cuántos autobuses y cuántos autos había estacionados?

4. Imaginen que deben aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, la cual es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre tres opciones, dependiendo del tratamiento. Según el tipo de medicina, las personas tienen diferentes reacciones a las sustancias, para algunas, éstas tienen el mismo resultado, mientras que para otras puede ser mayor o menor. En la tabla E2.1 se muestran los años que han vivido varios pacientes que se han tratado con una de las opciones mencionadas; cada dato de la tabla corresponde a un paciente.

Tabla E2.1 Tiempo que han seguido un tratamiento médico tres pacientes

Tiempo en años (Tratamiento 1)
5.2
5.6
6.5
6.5
7.0
7.0
7.0
7.8
8.7
9.1

Tiempo en años (Tratamiento 2)
6.8
6.9
6.9
7.0
7.0
7.0
7.1
7.1
7.2
7.4

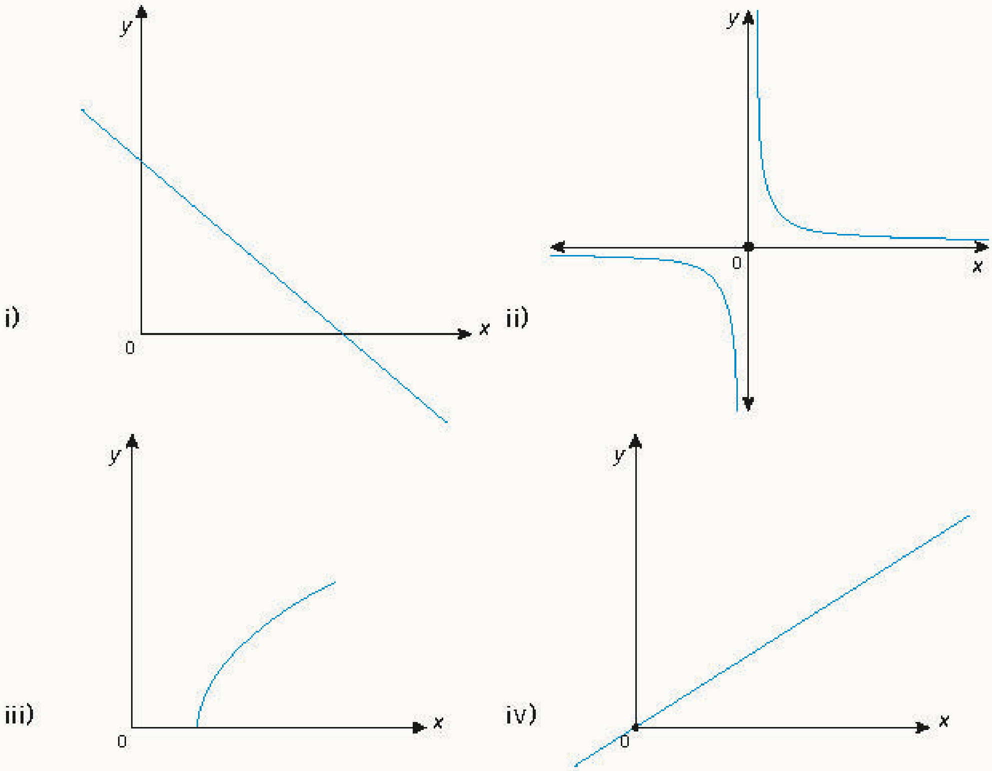
Tiempo en años (Tratamiento 3)
6.8
6.8
6.9
7.0
7.0
7.1
7.1
7.1
7.2
7.4

a) En la siguiente página, tracen una gráfica de cada conjunto de datos.

b) Comparen y digan en qué conjunto de datos es mayor la dispersión y en cuál es menor.

c) ¿Qué tratamiento recomendarían y por qué?

5. Analicen las gráficas E2. 1 y respondan las preguntas.



Gráfica E2. 1 Gráfica de proporcionalidad

a) ¿Cuál o cuáles gráficas corresponden a relaciones de proporcionalidad directa? Márquenlas con una X color verde.
b) ¿Cuál o cuáles gráficas corresponden a relaciones de proporcionalidad inversa? Márquenlas con una X color azul.
c) ¿Cuál gráfica corresponde a una función lineal que no es de proporcionalidad directa? Márquenla con una X color rojo.

6. Un cocodrilo que vive en el Amazonas tiene una masa promedio de 280 kg y mide 3.5 m de largo. La masa de un lagarto que vive en los pantanos de Florida es en promedio 550 lb y mide 135.8 in. Escriban todas las equivalencias que usaron para hacer la comparación. Consideren que 1 in = 2.54 cm y 1 lb = 454 g.

a) ¿Cuál de los dos es más largo? ____________________

b) ¿Cuál de los dos tiene más masa? ____________________

7. Hacen falta 13 dm^3 de agua para producir un jitomate. ¿Cuántos galones de agua se requieren para producir un jitomate si 1 gal = 3.8 litros? ____________

____

BLOQUE 3

¿De qué se trata?

En este bloque tendrás la oportunidad de relacionar las expresiones algebraicas con el dominio de las sucesiones numéricas y de figuras, ya que dicha relación es propicia para ver la equivalencia de expresiones algebraicas. Estudiarás también los polígonos regulares y la relación entre el número de lados del polígono y los ángulos que forman, lo que permite encontrar procedimientos y técnicas para construirlos. También estudiarás problemas relacionados con el cálculo del área y del perímetro de dichas figuras.

Continuarás con el estudio de la probabilidad en el que aprenderás algunos conceptos que forman la base de esta rama de las matemáticas, como experimento aleatorio y espacio muestral, además de vincularlo con el concepto de frecuencia relativa que estudiaste en primer grado. Por último, te enfrentarás a problemas del cálculo de volúmenes de prismas y cilindros rectos, un tema cuyo conocimiento es igualmente requerido en la vida diaria, laboral y profesional.

BLOQUE 3

S15 Expresiones algebraicas equivalentes

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

En un examen por equipos, a Beatriz, Andrés y Carlos les tocó responder la siguiente pregunta: "¿Qué expresión algebraica genera los números escuadra (figura 15.1), es decir, aquellos que forman la sucesión del número de cuadrados que hay en cada escuadra: 3, 5, 7, 9,...".

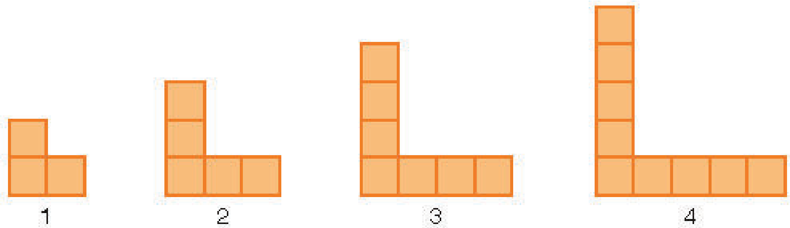


Figura 15.1 Números escuadra

Andrés propone la expresión algebraica $S = n + (n + 1)$; Beatriz, la expresión $T = 2n + 1$, y Carlos, la expresión $N = 3 + 2(n - 1)$.

a) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas? ¿Por qué? ______

______

b) ¿Cuál creen que fue el razonamiento de cada uno para determinar su expresión? ______

______

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. En particular, comenten qué entienden por "expresiones algebraicas equivalentes".

Sesión 1. Sucesiones y expresiones algebraicas equivalentes

α Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. Consideren la sucesión formada por el número de puntos de cada triángulo de la figura 15.2.

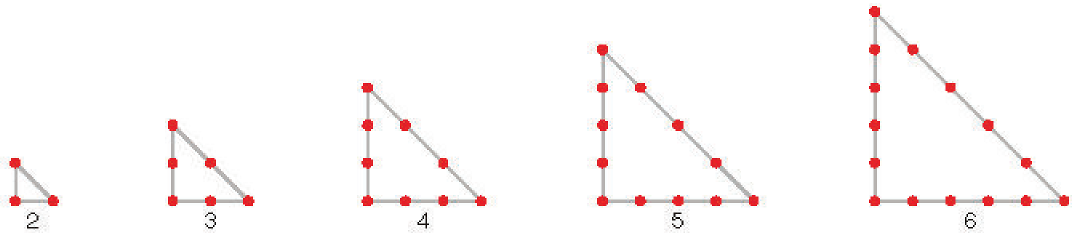


Figura 15.2 Sucesión de puntos que forman triángulos

a) Escriban los primeros cinco términos de la sucesión. ______

b) Encuentren y escriban los siguientes cinco términos de la sucesión (los correspondientes a las figuras 7, 8, 9, 10 y 11). ______

______

c) Si se numera cada triángulo de acuerdo con el número de puntos de su base, ¿cuál es el número de puntos del triángulo cuya base es 34? ______

d) Determinen dos expresiones algebraicas diferentes para generar la misma sucesión. ______

______

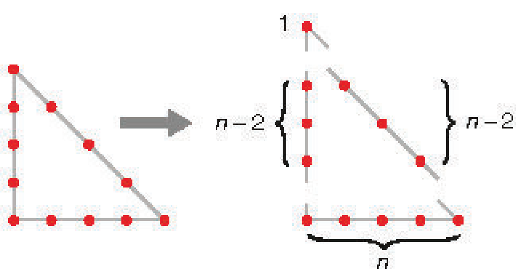
*Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Digan si las expresiones que propusieron son diferentes o equivalentes. Argumenten sus respuestas.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

2. Rocío, Pedro y Susana propusieron expresiones algebraicas diferentes para generar la sucesión de la figura 15.2. Para explicar a sus compañeros la expresión algebraica, cada uno hizo un esquema de su razonamiento (figuras 15.3, lado derecho de la flecha).

   a) A continuación se ofrece una descripción de la manera en que Pedro, Rocío y Susana descompusieron el triángulo. Luego representaron su razonamiento mediante una figura. Del lado izquierdo de cada flecha está el triángulo original, y del lado derecho, su descomposición para contar los puntos. Con base en las descripciones y en la figura, determinen la expresión algebraica que cada uno propuso.

Pedro: "Puedo contar los puntos de la base y el del vértice opuesto; los puntos que falta contar de los otros dos lados tienen el mismo número de puntos que la base menos 2".



Expresión algebraica de Pedro: ______

Figura 15.3a Esquema del razonamiento de Pedro para justificar su expresión algebraica

Rocío. "Cuento los puntos de la base, y sumo los puntos de la base menos 1 de otro lado y los puntos de la base menos 2 del tercer lado".

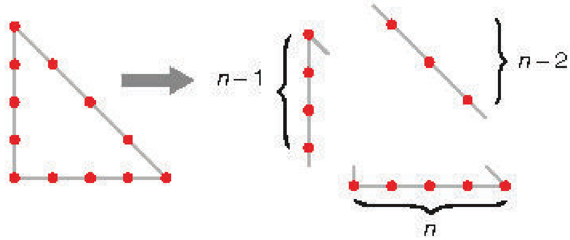


Figura 15.3b Esquema del razonamiento de Rocío para justificar su expresión algebraica

Expresión
algebraica de Rocío: ______________

Susana: "Multiplico por tres los puntos de la base, pero como cuento cada vértice dos veces al resultado del quito 3."

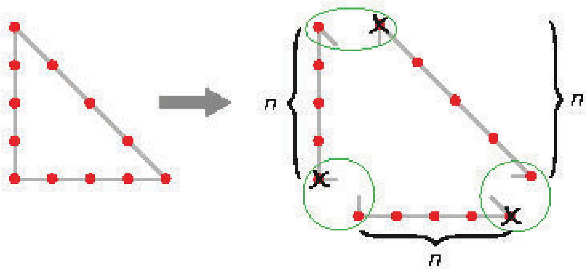


Figura 15.3c Esquema del razonamiento de Susana para justificar su expresión algebraica

Expresión
algebraica de Susana: ______________

b) Muestren que las tres expresiones son equivalentes eliminando paréntesis y haciendo las operaciones.

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Muestren que las expresiones algebraicas diferentes que propusieron son equivalentes verificando que generan la sucesión: 3, 6, 9, 12, 15,...

3. Contesten lo que se pide a partir de las siguientes figuras.

a) Observen la sucesión de la figura 15.4. Describan los primeros cinco términos de la sucesión "el número de cuadrados de la figura" y encuentren la expresión algebraica que la genera. ______________________________

____

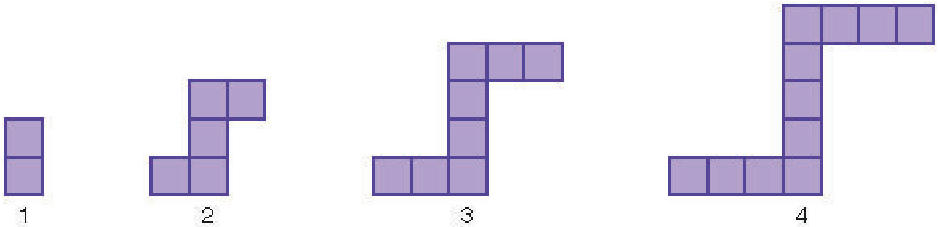


Figura 15.4 Sucesión de figuras "Eses"

b) Observen la sucesión de la figura 15.5. Describan los primeros cinco términos de la sucesión "el número de cuadrados de la figura" y encuentren la expresión algebraica que la genera. ______________________________

____

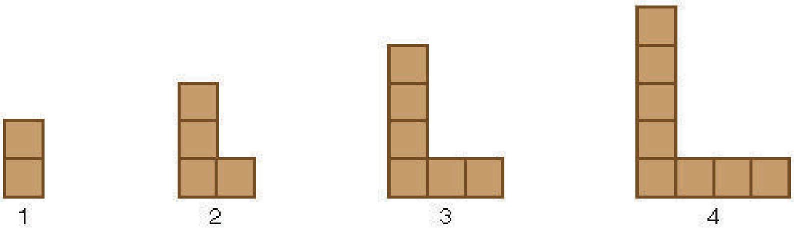


Figura 15.5 Sucesión de figuras "Eles"

c) Observen la sucesión de la figura 15.6. Describan los primeros cinco términos de la sucesión "el número de cuadrados de la figura" y encuentren la expresión algebraica que la genera.

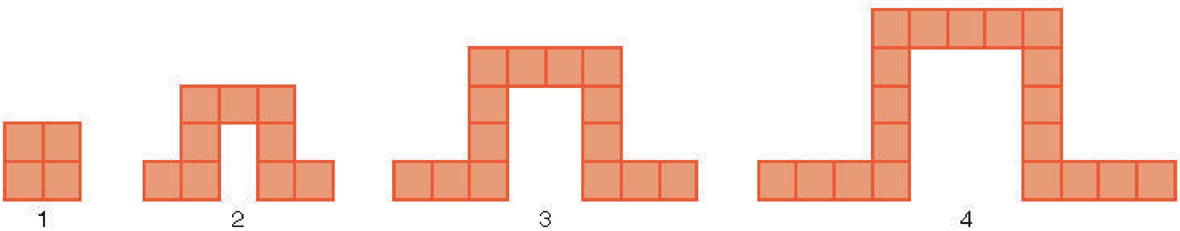


Figura 15.6 Sucesión de figuras herradura

d) Determinen otra expresión algebraica para la sucesión de la figura 15.6 teniendo en cuenta su relación con las sucesiones de las figuras 15.4 y 15.5.

e) Escriban las dos expresiones que generan la sucesión de la figura 15.6; vayan de la más complicada a la más sencilla eliminando paréntesis y haciendo operaciones.

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si propusieron expresiones diferentes, verifiquen que sean equivalentes viendo que en efecto generan las sucesiones correspondientes.

Cuando se tienen dos expresiones equivalentes que generan una misma sucesión, y ambas expresiones se igualan entre sí, se llega a una identidad. Una **identidad** es una ecuación en la que cada miembro de la igualdad genera la misma sucesión de números. Las siguientes son identidades que pueden ser obtenidas de los problemas de arriba:

i) $n + (n + 1) = 2n + 1$

ii) $(n + 1) + 2(n - 2) = 3n - 3$

iii) $(3n - 1) + 2n = 5n - 1$

Como el miembro de la derecha de las identidades anteriores es más simple que el miembro de la izquierda, también se pueden pensar como reglas para simplificar expresiones. Otro rasgo importante de las identidades es que el resultado de sustituir un valor numérico en la variable en ambos lados de la identidad lleva a que el resultado de hacer las operaciones en la izquierda será el mismo número que el resultado de las operaciones de la derecha.

Problemas

4. En la figura 15.7, se presentan tres sucesiones de figuras. Analícenlas y hagan lo que se indica.

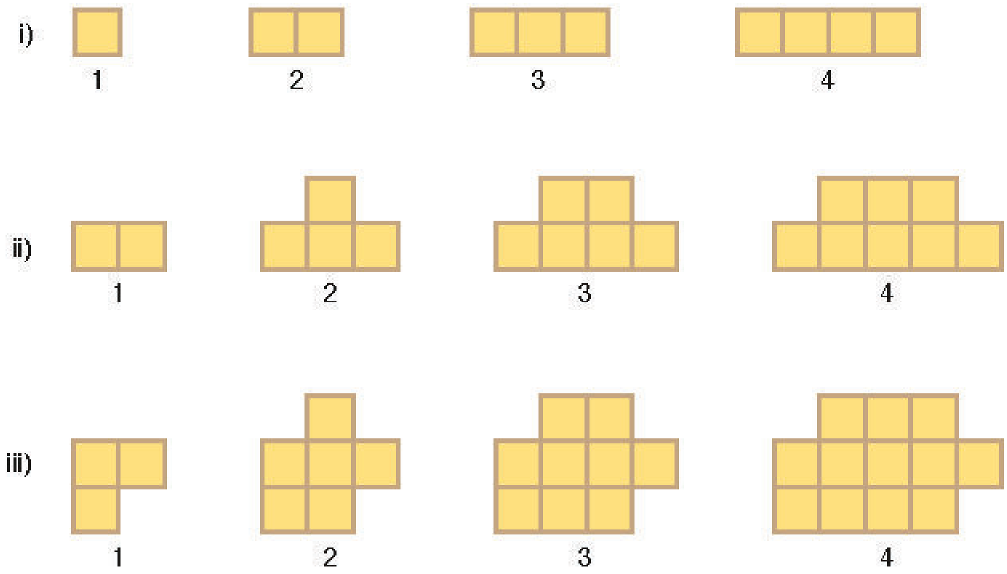


Figura 15.7 Tres sucesiones de figuras

a) En cada caso, escriban los primeros cinco términos de la sucesión y obtengan la expresión algebraica que la genera. ______________________

____

b) Verifiquen que, además de las expresiones algebraicas que obtuvieron, las siguientes expresiones también generen en cada caso la misma sucesión:

i) $1 + (n - 1)$ ii) $2 + 2(n - 1)$ iii) $3 + 3(n - 1)$

c) Muestren que las anteriores expresiones son equivalentes a las que ustedes propusieron.

d) Escriban dos expresiones algebraicas para describir la sucesión del inciso iii.

____

____

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Expresen la identidad como resultado de la anterior equivalencia.

5. Verifiquen, escriban los términos o encuentren expresiones algebraicas.

a) Verifiquen que la expresión algebraica de la sucesión S: 4, 7, 10, 13, 16,... es $S = 3n + 1$.

b) Verifiquen que la expresión algebraica de la sucesión T: 3, 10, 17, 24, 31,... es $T = 7n - 4$.

c) Dadas dos sucesiones, S y T, la sucesión $S + T$ es la sucesión que a cada término de la sucesión S le suma el término correspondiente de la sucesión T. Escriban los primeros cinco términos de la sucesión $S + T$, donde S es la sucesión del inciso **a** y T la del inciso **b**. ______________________

d) Encuentran dos expresiones algebraicas para generar la secuencia $S + T$.

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Verifiquen que las expresiones encontradas sean equivalentes; reduzcan la más complicada a la más sencilla eliminando paréntesis y haciendo las operaciones.

6. Observen las figuras y contesten.

a) Verifiquen que la expresión algebraica de N = "el número de segmentos que tiene el arreglo" de la figura 15.8 es $N = 3n + 1$.

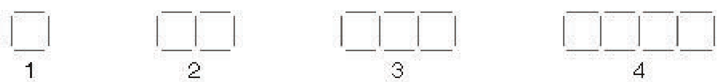


Figura 15.8 Sucesión del número de segmentos de cada arreglo

b) Verifiquen que la expresión algebraica de T = "el número de segmentos que tiene el arreglo" de la figura 15.9 es $T = 3n + 7$.

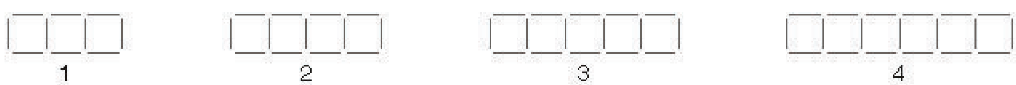


Figura 15.9 Sucesión del número de segmentos de cada arreglo

c) Verifiquen que la expresión algebraica de R = "el número de segmentos que tiene el arreglo" de la figura 15.10 es $R = 5n + 8$.

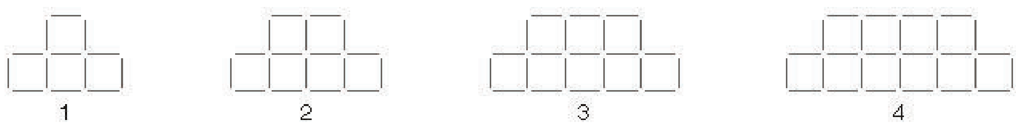


Figura 15.10 Sucesión del número de segmentos de cada arreglo

d) Aprovechando la relación entre las sucesiones de las figuras 15.8, 15.9 y 15.10, den una expresión algebraica diferente de la que se propone para la sucesión de la figura 15.10. ______________________________

____

e) Verifiquen la equivalencia de las expresiones de los incisos c y d.

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. En caso de haber llegado a expresiones algebraicas diferentes, verifiquen que sean equivalentes.

Formen equipos de tres alumnos y hagan lo que se pide.

7. Realicen una actividad como las actividades 5 y 6 para encontrar dos expresiones algebraicas para la sucesión: "el número de puntos de cada arreglo" de la figura 15.11.

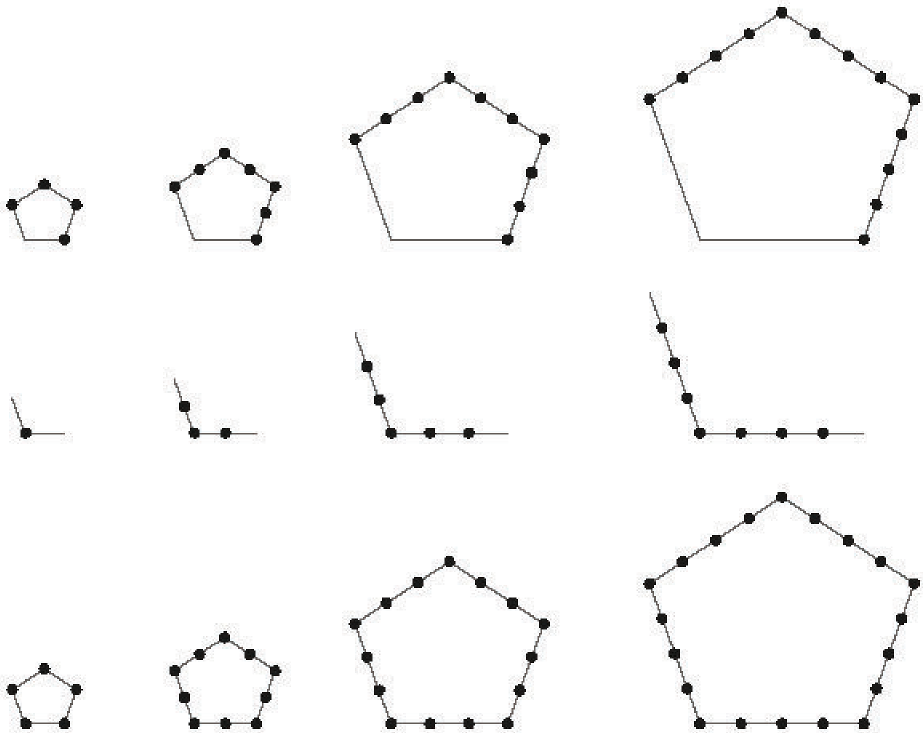


Figura 15.11 Tres secuencias

* Preparen una exposición en la que muestren de qué manera que encontraron las expresiones algebraicas y la identidad que se puede obtener. El profesor organizará las exposiciones en reunión grupal.

Sesión 2. Áreas y expresiones algebraicas equivalentes

α Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. En la figura 15.12, se muestra un rectángulo dividido en dos rectángulos menores con sus lados indicados con literales.

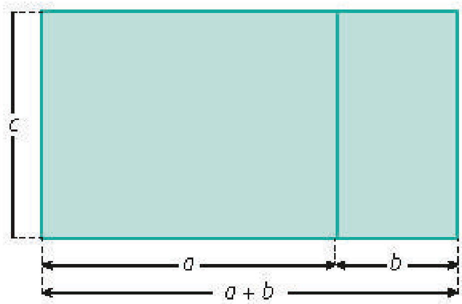


Figura 15.12 Rectángulo de base $a + b$ y altura c seccionado en dos rectángulos

a) Propongan al menos tres expresiones algebraicas para el perímetro del rectángulo grande. ______________________

____

b) Verifiquen que las tres expresiones sean equivalentes quitando paréntesis y haciendo operaciones en las expresiones más extendidas para llegar a la más reducida. ______________________

____

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. En caso de que sean diferentes las expresiones que propusieron para el perímetro, también verifiquen que sean equivalentes dando valores a las literales; por ejemplo, constaten que las tres expresiones dan el mismo valor cuando: $a = 3$, $b = 2$ y $c = 4$.

σ También se pueden encontrar expresiones equivalentes mediante las distintas formas de expresar el perímetro o el área de una figura cuyos lados se representan con una literal. En la siguiente actividad tendrás la oportunidad de hacerlo.

2. Observen la figura 15.13.

a) Escriban dos expresiones algebraicas para determinar el perímetro P_1 del triángulo. ______________________

____

b) Escriban dos expresiones algebraicas para determinar el perímetro P_2 del rectángulo. ______________________________

____

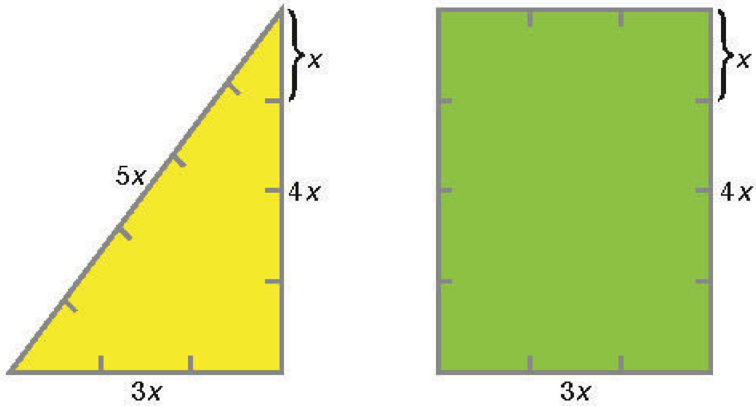


Figura 15.13 Un triángulo y un rectángulo con la misma base y la misma altura

c) Den un valor a x (por ejemplo, $x = 1.5$) y verifiquen que las expresiones que propusieron para el perímetro del triángulo den el mismo resultado. ______

____

d) Con el mismo valor, verifiquen que las expresiones que propusieron para el perímetro del rectángulo den el mismo resultado cuando se sustituye $x = 1.5$.

____

____

* Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Comenten la regla para sumar expresiones algebraicas de una misma variable con exponente 1.

3. En la figura 15.14, se muestra un rectángulo de base $b + 2$ y altura 5, dividido en dos rectángulos más pequeños.

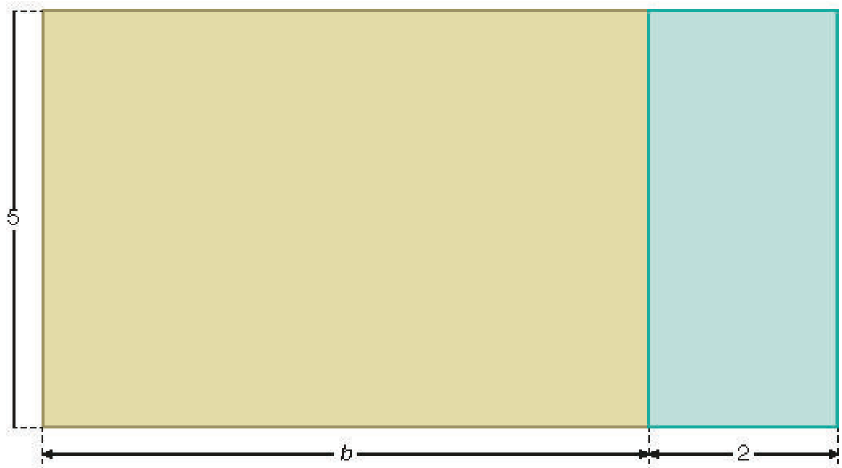


Figura 15.14 Un rectángulo dividido en dos rectángulos de la misma altura

a) Den dos expresiones algebraicas para el área A_G del rectángulo grande.

____

____

b) Muestren para un valor particular de b, por ejemplo, $b = 8.3$, que las dos expresiones que propusieron dan el mismo valor para el área. ______________________________

____

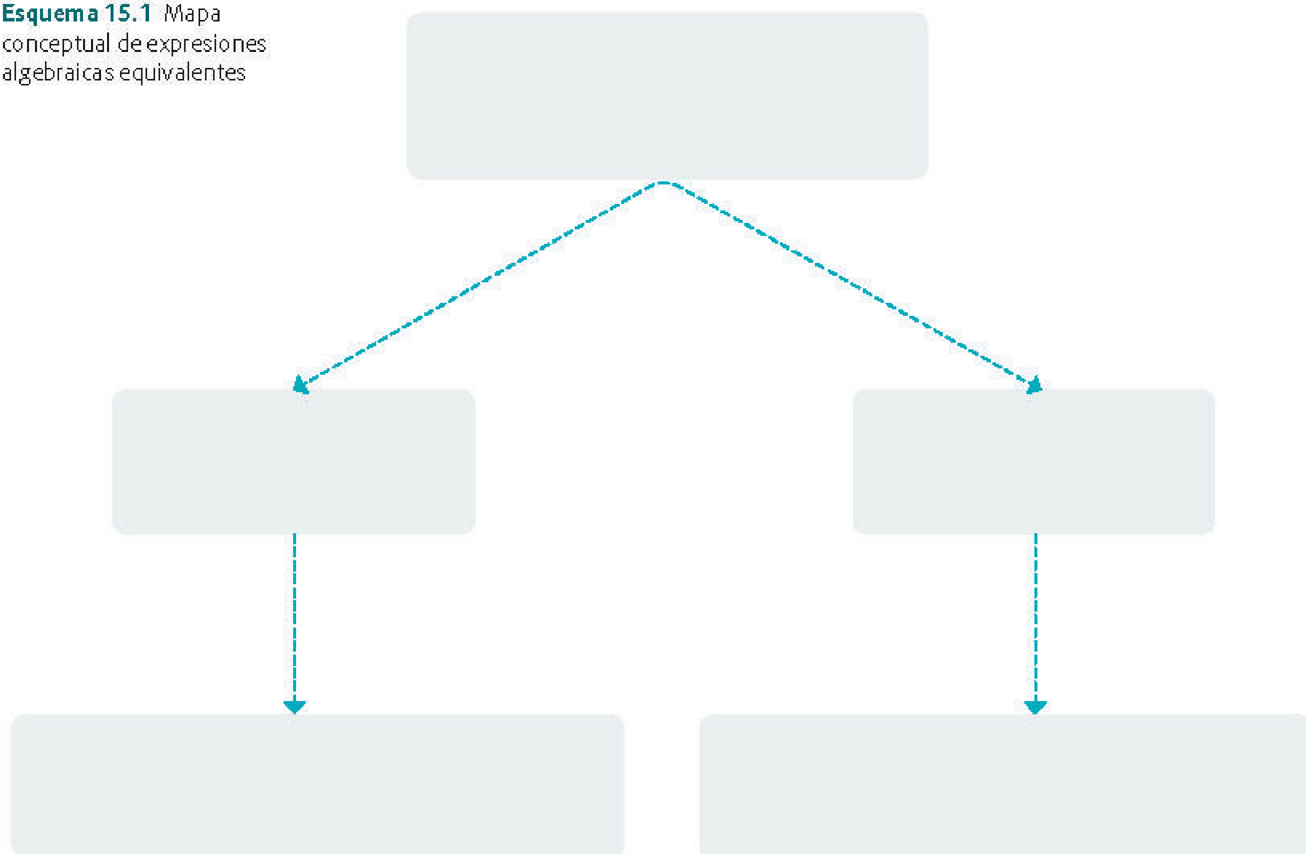
* Reúnanse en equipo para comparar sus expresiones algebraicas y ver en qué son diferentes.

En retrospectiva

Coloca cada una de las siguientes frases en un recuadro del mapa conceptual, de manera que exprese las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Perímetros y áreas de rectángulos
- Expresión algebraica
- Generan la misma sucesión
- Representan el mismo perímetro o la misma área
- Sucesiones

Esquema 15.1 Mapa conceptual de expresiones algebraicas equivalentes



¿Qué aprendí?

Hagan individualmente lo que se pide.

1. En la figura 15.15, se muestran estructuras formadas por segmentos del tamaño de un cerillo. Cada estructura se numera de acuerdo con el número de segmentos en su base, cuyas longitudes son iguales a la base del primer triángulo.

   a) Encuentren los primeros cinco términos de la sucesión "el número de segmentos del tamaño de un cerillo que forman la estructura".

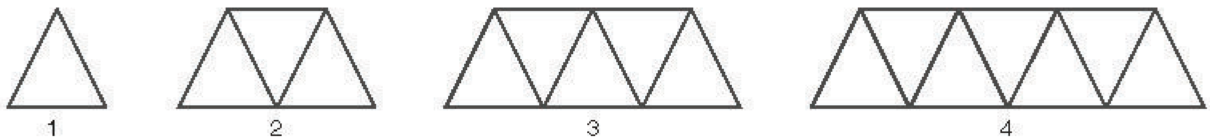


Figura 15.15 Arreglos de segmentos formando una estructura de triángulos

   b) En la figura 15.16, se muestra una descomposición de la figura 15.15 en dos subsucesiones. Con base en ellas, encuentren dos expresiones equivalentes para la sucesión de la figura 15.16 y escriban la identidad correspondiente.

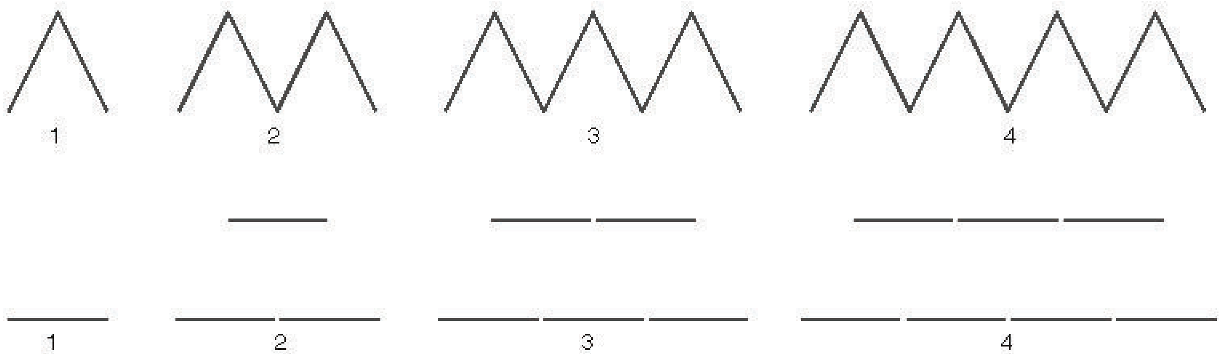


Figura 15.16 Sucesiones componentes de la sucesión de la figura 15.15

2. En la figura 15.17 (página 216), se muestran tres sucesiones de arreglos de puntos. Para cada una encuentren los primeros términos de la sucesión "el número de puntos de la figura". Encuentren la expresión algebraica que las genera y la identidad algebraica que relaciona las expresiones algebraicas de cada una.

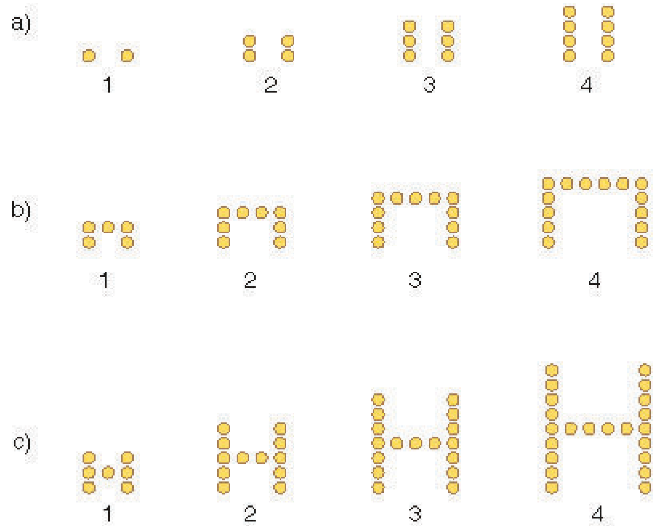


Figura 15.17 Tres sucesiones de número de puntos

3. En la figura 15.18, se muestran dos polígonos con las dimensiones de sus lados expresadas con un número o una literal.

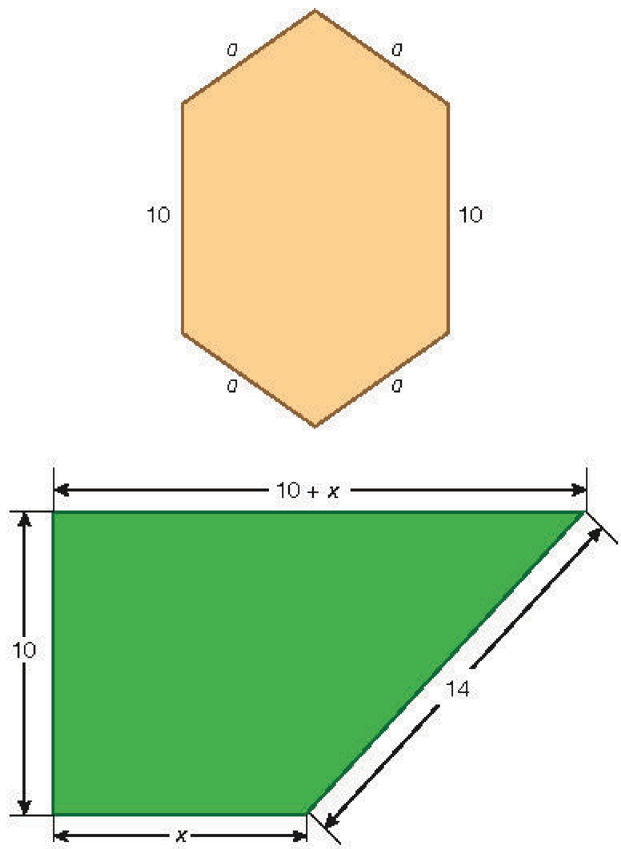


Figura 15.18 Dos polígonos con la longitud de sus lados

a) Escriban dos expresiones algebraicas para el perímetro del hexágono de la figura 15.18. ______

b) Verifiquen que ambas expresiones representan el mismo perímetro sustituyendo $a = 5.5$. ______

c) Escriban dos expresiones algebraicas para el área del cuadrilátero de la figura 15.18. ______

d) Verifiquen que con ambas expresiones se obtiene la misma área sustituyendo $x = 8$. ______

4. En la figura 15.19, se muestra un rectángulo formado por dos rectángulos más pequeños.

a) Den dos expresiones algebraicas para determinar el área A del rectángulo *ABCD*. ______

b) Verifiquen que ambas expresiones den la misma área cuando $a = 3.8$.

______

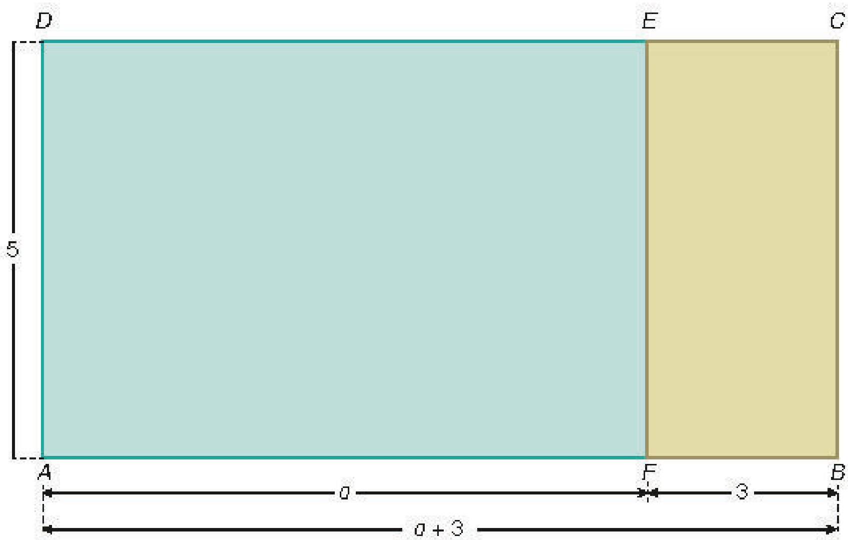


Figura 15.19 Un rectángulo dividido en dos más pequeños

* Reúnase con otros compañeros y comparen sus respuestas a los problemas anteriores. Si hay diferencias en las expresiones que dieron, comprueben que son equivalentes.

BLOQUE 3

S16 Polígonos regulares

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Trabajen individualmente.

1. En la figura 16.1 se presenta un mosaico formado por triángulos y en la figura 16.2, uno formado por cuadrados. Analícenlos y respondan las preguntas.

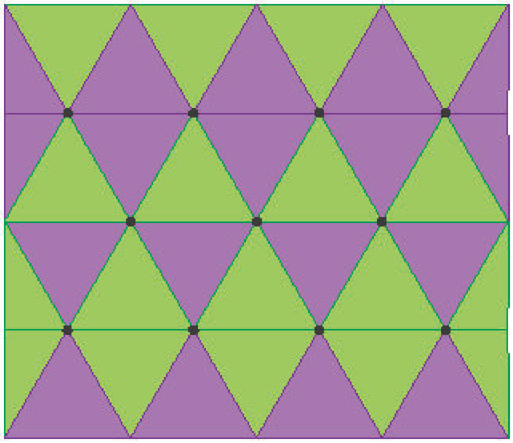


Figura 16.1 Mosaico formado por triángulos

a) ¿Qué tipo de triángulos forman el mosaico de la figura 16.1? ______________________

b) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de esos triángulos? ______________________

c) ¿Cuántos triángulos convergen en cada punto de los que se encuentran en el interior del mosaico? ______________________

d) ¿Cuánto suman los ángulos de los triángulos que convergen en un punto de los mencionados en el inciso c? ______________________

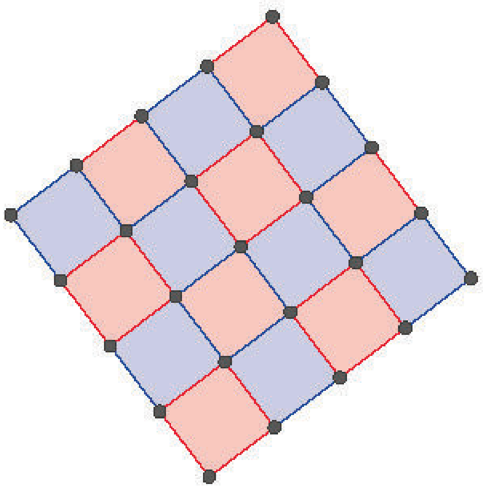


Figura 16.2 Mosaico formado por cuadrados

e) ¿Cuánto miden los ángulos interiores de un cuadrado? ______________

f) ¿Cuántos cuadrados convergen en cada punto de los que se encuentran en el interior del mosaico de la figura 16.2? ______________

g) ¿Cuánto suman los ángulos de los cuadrados que convergen en uno de los puntos mencionados en el inciso f? ______________

Sesión 1. Ángulos en polígonos regulares

Trabaja individualmente

α

1. Completen los enunciados.

a) Los triángulos son polígonos de ______________ lados y ______________ ángulos.

b) Los ______________ son polígonos de cuatro lados y ______________ ángulos.

c) Los triángulos que tienen sus ______________ y ángulos iguales se llaman equiláteros y los cuadriláteros que tienen sus cuatro ______________ y ______________ iguales se llaman ______________.

d) En un triángulo, la suma de sus ángulos interiores es ______________.

e) En un triángulo equilátero cada ángulo interior mide ______________.

f) En un cuadrado, la suma de los ángulos interiores es ______________ y cada ángulo interior mide ______________.

σ

Un **polígono** es una figura geométrica plana limitada por tres o más segmentos de rectas consecutivos no alineados llamados lados.

Si los lados de un polígono son todos iguales, el polígono se denomina **polígono regular**.

Polígono se deriva de dos raíces griegas, *poli* que significa muchos y *gono* que significa ángulo.

Actividad

Trabajen en parejas.

2. Observen la figura 16.3.

a) Si *penta* es la raíz griega para cinco y *hexa* para seis, ¿qué nombre tienen los polígonos A, B, C y D? (figura 16.3) ______________

____

b) Averigüen cómo se llaman los polígonos de 7, 10, 11 y 12 lados. Escriban aquí los nombres. ______________

____

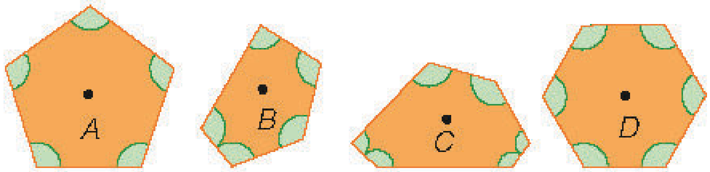


Figura 16.3 Polígonos regulares e irregulares

Sigan trabajando en parejas. Necesitarán un compás y escuadras.

3. Observen la figura 16.3. En ella aparecen cuatro polígonos a los que se les han marcado los ángulos interiores y un punto al interior que se denominará centro.

a) ¿Qué clase de polígono es cada uno por el número de sus lados? ____________

b) ¿En qué se parecen y en qué difieren los polígonos A y B? ____________

c) ¿En qué se parecen y en qué difieren los polígonos C y D? ____________

En cualquier polígono, los ángulos formados por dos lados que se unen en un vértice y quedan en el interior del polígono se llaman ángulos interiores (véase el ángulo α en la figura 16.4). Los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro lado con un vértice común se llaman exteriores (véase el ángulo γ en la figura 16.4).

Los polígonos que tienen todos sus lados iguales se denominan regulares.

Los polígonos regulares tienen todos sus lados y ángulos interiores iguales y tienen centro, esto es, un punto que está a la misma distancia de todos los vértices.

Los ángulos formados por dos segmentos que van desde el centro hasta cada uno de los vértices de un mismo lado del polígono se denominan ángulos centrales (véase el ángulo β en la figura 16.4).

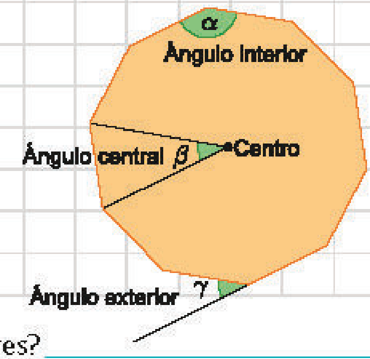


Figura 16.4 Ángulos en un polígono: interior, central y exterior

d) ¿Qué polígonos de la figura 16.3 son regulares? ____________

e) En cada polígono regular de la figura 16.3 tracen los ángulos centrales.

Un ángulo de circunferencia completo mide 360°.

4. Para este análisis deben observar la figura 16.3, por lo que conviene que la copien para tenerla cerca.

a) ¿Cómo queda dividido el pentágono regular? ____________

b) Según la medida de sus lados, ¿qué tipo de figuras son? ____________
¿Cómo son entre sí estas figuras? ____________

c) ¿Cuánto mide cada ángulo central del pentágono regular? ______
¿Cómo lo obtuvieron? ______

d) ¿Estos ángulos dependen del tamaño de los lados de los polígonos? ______
¿Por qué? ______

e) ¿Cuánto suman los dos ángulos de la base de uno de estos triángulos? ______
¿Cuánto mide cada uno? ______

f) ¿Cuánto mide un ángulo interior del pentágono regular? ______

5. Repitan el análisis de la actividad 4 para el hexágono.

a) Al terminar escriban las medidas de sus ángulos centrales: ______, ángulos exteriores: ______, ángulos interiores: ______.

b) ¿Qué particularidad tienen los triángulos en los que queda dividido el hexágono que no tenían los del pentágono? ______

6. En la figura 16.5 se muestran un pentágono y un hexágono regulares a los que se les ha prolongado un lado. En cada polígono, marquen el ángulo que forma esta prolongación con el lado adyacente. Sin hacer ninguna medición respondan.

a) ¿Cuánto mide cada uno de estos ángulos? Escríbanlo en el ángulo correspondiente en la imagen. ¿Qué observan? ______

______

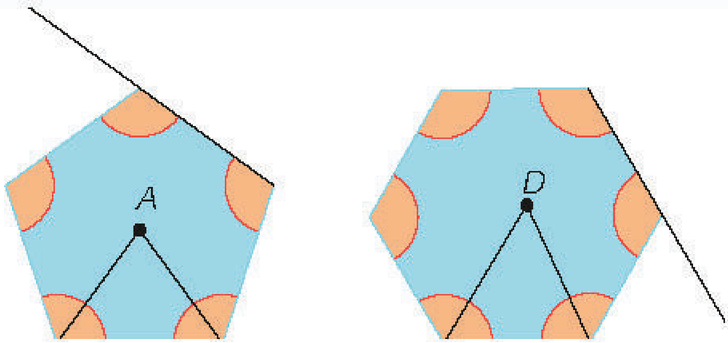


Figura 16.5 Pentágono y hexágono regulares

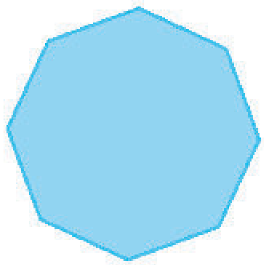


Figura 16.6 Polígono

7. Observen la figura 16.6 y respondan.

a) ¿Qué clase de polígono es?

______

b) Tracen perpendiculares por los puntos medios de dos lados cualesquiera del octágono de la figura 16.6. Con su compás, verifiquen que el punto de intersección de estas perpendiculares es el centro del polígono.

c) Desde el centro del octágono de la figura 16.6 tracen segmentos que lo unan a cada vértice. ¿En cuántos triángulos queda dividido el octágono? ¿De qué tipo son de acuerdo con la medida de sus lados? ¿Cómo son entre sí estos triángulos?

d) ¿Cuánto mide cada ángulo central del octágono? ¿Cómo lo obtuvieron?

e) ¿Estos ángulos dependen del tamaño de los lados de los polígonos? ¿Por qué?

f) ¿Cuánto suman los dos ángulos de la base de uno de estos triángulos? ¿Cuánto mide cada uno?

g) ¿Cuánto mide un ángulo interior del octágono?

8. Tracen un segmento de 3 cm en su cuaderno.
   a) En cada extremo usen el transportador para trazar ángulos cuya medida sea la mitad del ángulo interior de un octágono.
   b) Prolonguen los lados de los ángulos hasta que se corten. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
   c) ¿Qué polígono se forma si unen por el vértice del ángulo diferente ocho triángulos como el que trazaron?

Actividad

ω

9. En equipos, reflexionen en lo que hicieron en esta secuencia para el pentágono, hexágono y octágono, respondan las preguntas.
   a) Expresen con fórmulas cómo obtener la medida de los ángulos centrales de pentágonos, hexágonos y octágonos; conjeturen cuánto sería para un polígono regular de *n* lados. ______
   b) ¿Cómo encuentran la medida de los ángulos interiores? Conjeturen cuánto sería para un polígono regular de *n* lados. ______
   c) ¿Cuánto suman las medidas de un ángulo interior y uno exterior? ______

* Recuerden que una conjetura no es un resultado comprobado, pero al final de la secuencia se pueden discutir las conjeturas y encontrar cuáles son verdaderas para el caso general.

α

Sesión 2. Diagonales de un polígono

Trabajen en parejas. Necesitarán escuadras y lápices de colores.

1. Trabajen con la figura 16.7.
   a) En el pentágono tracen segmentos de recta del vértice 1 al 3 y del 1 al 4.

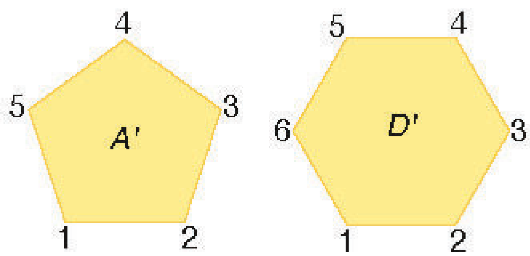


Figura 16.7 Polígonos regulares

   b) ¿Por qué consideran que no se trazaron segmentos del 1 al 2 o al 5? ______
   ______
   c) En el hexágono tracen segmentos de recta del vértice 1 al 3, 1 al 4 y del 1 al 5.
   d) ¿Por qué consideran que no se trazaron segmentos del 1 al 2 o al 6? ______
   ______

Una diagonal de un polígono es un segmento de recta que une vértices no consecutivos.

2. Sigan trabajando con la figura 16.7.

   a) En el pentágono de la figura 16.7, ¿pueden trazar alguna otra diagonal desde el vértice 1? ____________ ¿Por qué? ____________

   b) Usen un lápiz de otro color para trazar todas las diagonales posibles que partan del vértice 2. Encima las del vértice 1 si es necesario, pero que se noten ambas. ¿Cuántas trazaron y de qué vértice a qué vértice? ____________

   c) Continúen hasta que tracen todas las diagonales que salen de los vértices 3, 4 y 5, siempre con distinto color y encimando dos colores si es necesario. ¿Cuántas diagonales han trazado en total contando las dobles? ____________
   ¿Qué pasa si las dobles sólo se cuentan como una sola diagonal? ¿Cuántas diagonales tiene el pentágono? ____________

3. Efectúen el procedimiento de la actividad 2 con el hexágono. ¿Cuántas diagonales tiene? ____________

4. Hagan con un heptágono y un octágono lo que hicieron en la actividad 2c.

   a) ¿Cuáles y cuántos son los vértices con los que se pueden trazar diagonales? ____________

   b) En un polígono de n lados, ¿en cuántos vértices no se pueden trazar diagonales? ____________

   c) Consideren los n vértices. Escriban la expresión algebraica que indica con cuántos vértices sí se pueden trazar diagonales a partir de un vértice elegido y otra para saber cuántas diagonales pueden trazarse en total en un polígono. ____________

5. Hemos visto que cada diagonal puede trazarse dos veces porque parte de dos vértices.

   a) En su cuaderno, tracen un triángulo equilátero y un cuadrado.

   I) ¿Cuántas diagonales tiene cada uno? ____________

   II) Comprueben su respuesta anterior al sustituir los datos del triángulo y del cuadrado en la segunda expresión que escribieron en la actividad 4c. ____________

   b) Comprueben la expresión que escribieron en la actividad 4c para el caso del pentágono, hexágono, heptágono y octágono. Compárenla con el número de diagonales que obtuvieron en las actividades 2 y 4; si no coinciden, es posible que haya algún error en la expresión o en los trazos. Revisen sus procedimientos con otra pareja para encontrar el error y corríjanlo.

   c) Si la segunda expresión que encontraron en la actividad 4c dio los mismos resultados que ya tenían cuando hicieron los trazos de las diagonales, es posible que hayan encontrado la fórmula para obtener el número de diagonales de cualquier polígono. Para confirmarlo, analicen la información del recuadro siguiente y respondan los incisos **d** y **e**.

1. Un icoságono es un polígono de 20 lados y tiene 170 diagonales.
2. El número de diagonales de un polígono de n lados es igual a la mitad del producto de vértices por el número de vértices menos 3.

d) Comprueben la expresión que obtuvieron para calcular el número de diagonales de un polígono de n lados con los datos del icoságono.

e) Comparen la descripción 2 dada en el recuadro anterior con la expresión que obtuvieron.

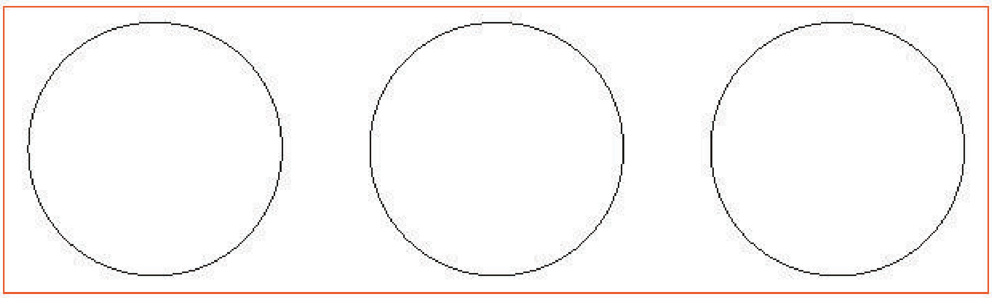
Sesión 3. Trazo de polígonos regulares

α Trabajen individualmente. Necesitarán juego de geometría.

1. En la tabla 16.1 se dan algunos ángulos de polígonos regulares; analícenlos y deduzcan de qué polígono se trata, después, tracen cada uno en el recuadro que está debajo de la tabla. Revisen la construcción de un octágono regular que realizaron en la actividad 6 de la sesión 1.

Tabla 16.1 Ángulos de polígonos regulares

Característica	Polígono A	Polígono B	Polígono C
Medida de los ángulos centrales	72°		
Medida de los ángulos interiores		135°	
Medida de los ángulos exteriores			60°



2. Reúnanse en parejas y comparen los polígonos que trazaron en la actividad 1.

a) ¿Tienen las mismas características que los que trazó su compañero? Por ejemplo, ¿los polígonos que cada uno trazó en A tienen el mismo número de lados y los lados de ambos miden lo mismo? ____________________

____

b) Hagan la misma comparación con B y C. Si sus polígonos no son del mismo tipo y congruentes en cada círculo, debe existir algún error. Analicen ambos procedimientos y encuentren el origen del error.

c) Observen el polígono en C, es un hexágono. ¿Cómo son los ángulos interiores y el central entre sí? ______

d) Tracen un triángulo cuya base sea un lado del polígono y el tercer vértice el centro del círculo. ¿Cómo es este triángulo? ______

Para cualquier polígono regular se puede trazar una circunferencia que contiene a todos sus vértices. El centro de esa circunferencia es la intersección de las **mediatrices** de cualesquiera dos de sus lados.
Al dividir un hexágono en triángulos cuya base es uno de sus lados y su tercer vértice es el centro del hexágono se obtienen seis triángulos equiláteros cuyos lados miden lo mismo que el radio de la circunferencia donde está inscrito.

En otras palabras

Una **mediatriz** de un segmento cualquiera es una perpendicular que pasa por su punto medio.

3. Apliquen el procedimiento que usaron en la actividad 2 inciso *d* para trazar un hexágono regular en la circunferencia de la figura 16.8, sin transportador, sólo con el compás y las escuadras.

   a) Expliquen cómo trazaron cada polígono.

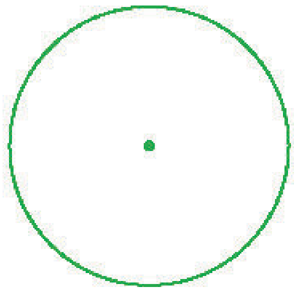


Figura 16.8 Circunferencia

Retomando una mirada previa

1. Lean la información y hagan lo que se solicita.

En geometría se usa el vocablo **teselado**, que no aparece en los diccionarios de la lengua española, para referirse a un arreglo de **teselas** que cubren el plano sin encimarse y sin que queden huecos. En las teselaciones pueden usarse polígonos regulares e irregulares, combinar varios polígonos o usar solamente uno. Las teselaciones en las que se usan sólo copias congruentes de un mismo polígono regular se llaman **teselaciones regulares**.

En otras palabras

La **tesela** es cada una de las piezas con que se forma un mosaico.

   a) Vayan a la sección *Una mirada previa* y verifiquen sus respuestas. Si es necesario, corrijan.

   b) En las figuras 16.1 y 16.2 de esa misma sección se presentan dos mosaicos. ¿Son estos mosaicos teselaciones regulares en el sentido geométrico? Expliquen.

______

______

______

c) Calquen y recorten el pentágono, hexágono, octágono y nonágono con los que se trabajó en la sesión 1. Hagan varias copias de ellos. Intenten hacer un teselado regular con cada tipo de polígono. ¿Qué observan? ____________________

d) Expliquen por qué sucedió lo que respondieron en el inciso anterior.

2. Discutan si hay algún otro polígono regular con el que se pueda construir un teselado regular, aparte de los que encontraron en la actividad 1 de la sección *Una mirada previa*.

a) Reflexionen sobre la característica que deben cumplir sus ángulos interiores y escriban su conclusión para presentarla en plenaria.

b) En la figura 16.9 se muestra un teselado formado por varios tipos de polígonos. ¿Cuáles reconocen? ____________________

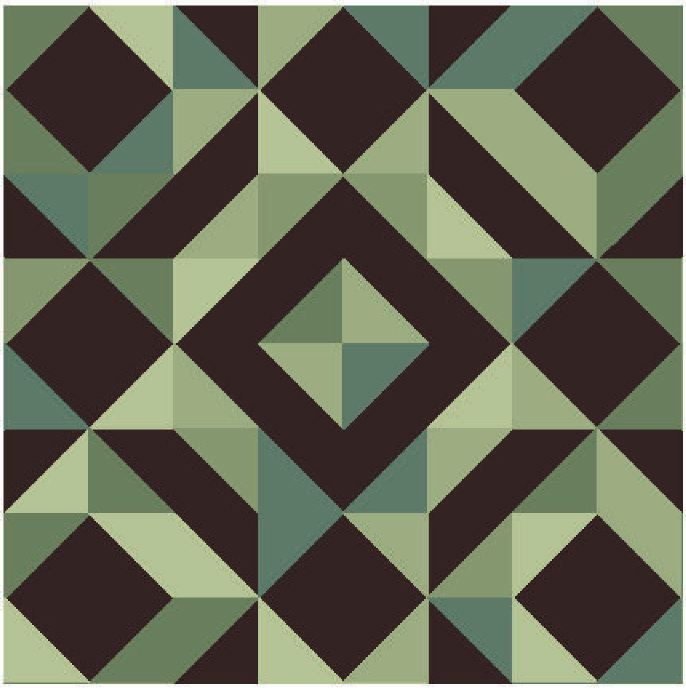


Figura 16.9 Teselado compuesto

c) Diseñen un teselado compuesto que esté formado por dos o más polígonos distintos y que sean diferentes a los que se usaron anteriormente. Expliquen cómo lo construyeron y por qué la medida de sus ángulos es adecuada para que no queden huecos ni se encimen las figuras que lo forman.

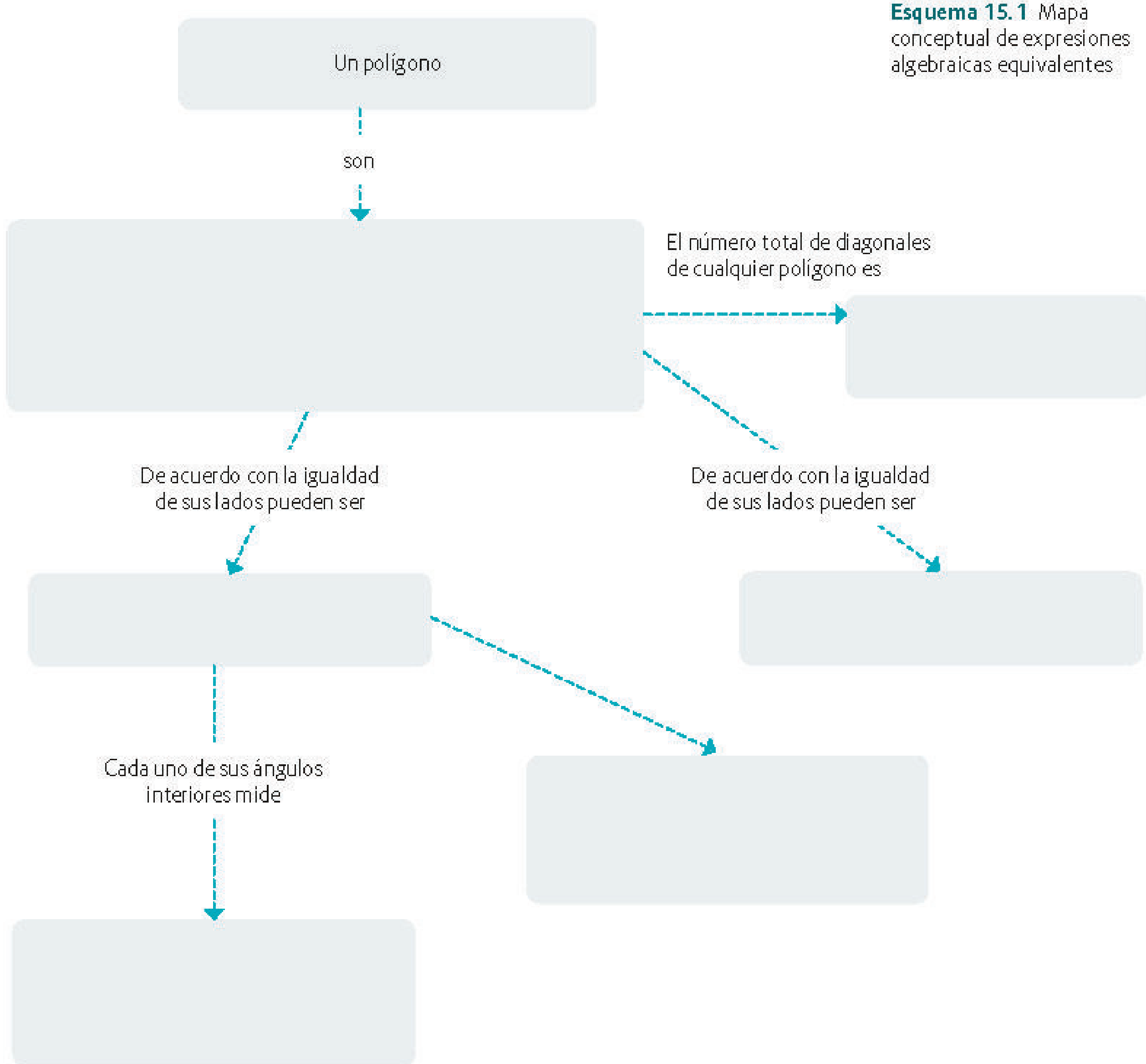
* En sesión grupal, los equipos pasen a mostrar las teselas que diseñaron y expliquen que realmente funcionan para cubrir el plano sin encimarse ni dejar huecos.

En retrospectiva

Lean cada una de las siguientes frases y coloquen la parte de ellas en un cuadro del mapa conceptual que se presenta en la siguiente página de manera que exprese las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Un polígono es una figura geométrica plana limitada por tres o más segmentos de rectas consecutivos no alineados llamados lados.
- Un polígono que tiene todos sus lados iguales se llama regular.
- Un polígono que no es regular se llama irregular.
- La medida de los ángulos interiores de un polígono regular es igual a $180 - \frac{360}{n}$.
- Los polígonos con los que se puede hacer un teselado regular son: triángulo equilátero, cuadrado, hexágono.
- Un polígono de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Esquema 15.1 Mapa conceptual de expresiones algebraicas equivalentes



¿Qué aprendí?

Trabajen individualmente. Necesitarán su juego de geometría.

1. ¿Cuánto mide cada ángulo interior, exterior y central de estos polígonos: decágono y dodecágono. ______

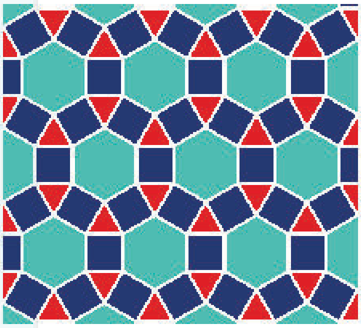


Figura 16.10 Tesela compuesta

2. Analicen la figura 16.10 y respondan las preguntas.
   a) ¿Cuántos tipos de polígonos conforman el teselado? ______
   b) ¿Qué nombre tiene cada uno de esos polígonos? ______
   c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada polígono de los que escribieron en el inciso anterior? ______

3. Analicen el polígono de la figura 16.11. Respondan las preguntas sin hacer trazos ni tomar medidas.
   a) ¿Cuántos lados tiene el polígono? ______
   b) ¿Es un polígono regular o irregular? Argumenten su respuesta. ______
   c) Si es regular, ¿cuánto mide cada uno de sus ángulos centrales e interiores? ______
   e) ¿Cuántas diagonales tiene el polígono? ______

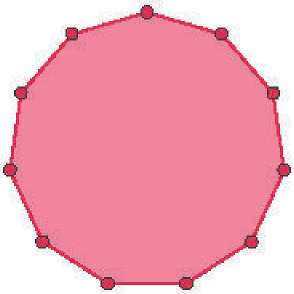


Figura 16.11 Polígono regular

4. Consideren nuevamente el polígono de la figura 16.11 y preparen su juego de geometría para efectuar lo que se indica a continuación.
   a) Localicen el centro del polígono.
   b) Tracen un ángulo central y un ángulo interior del polígono. ¿Cuánto mide cada uno?
      - Ángulo central: ______
      - Ángulo interior: ______
   c) Elijan un vértice cualquiera del polígono y tracen todas las diagonales posibles desde ese vértice.
   d) ¿Cuántas diagonales trazaron? ______
   e) Repitan lo que hicieron en el inciso c pero ahora para cada uno de los vértices del polígono.
   f) ¿Cuántas diagonales tiene en total el polígono? ______

* Reúnanse con un compañero. Usen GeoGebra y sus herramientas para corroborar sus respuestas a las preguntas anteriores. Copien el teselado de la figura 16.10 e inventen otra con tres polígonos regulares diferentes; primero piensen qué combinación de polígonos permite que se forme un teselado.

Área y perímetro de polígonos regulares y círculos

BLOQUE 3

S17

Trabaja individualmente.

1. Para construir un domo en el jardín se van a usar pentágonos de bambú como se ve en la figura 17.1.

   a) ¿Cómo se puede calcular el perímetro y qué datos se necesitarían?

   b) ¿Cómo se puede calcular el área y qué datos se necesitarían? Expliquen.

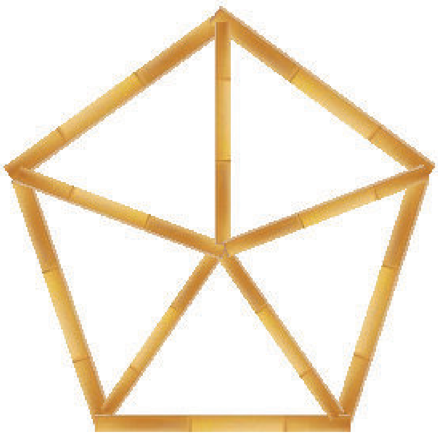


Figura 17.1 Base pentagonal de bambú

   c) ¿Pueden calcular el perímetro? Si su respuesta es sí, den el resultado; si es no, expliquen por qué no pueden hacer el cálculo.

   d) ¿Pueden calcular el área? Si su respuesta es sí, den el resultado; si es no, expliquen por qué no pueden hacer el cálculo.

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Sesión 1. Perímetro de polígonos regulares

α Trabajen individualmente.

1. Escriban la fórmula para calcular el perímetro P de los siguientes polígonos.
   a) Un triángulo equilátero de lado x. ______
   b) Un cuadrado de lado y. ______
   c) Un decágono regular de lado x. ______
   d) Un polígono regular de n lados. ______

σ Formen equipos de cuatro integrantes.

2. Observen la figura 17.2 que dibujó Elisa.
   a) Describan la figura, especifiquen qué polígonos usó Elisa en su dibujo, cuántos son de cada tipo y cómo están colocados.
   b) Con las fórmulas que escribieron en el punto 1 calculen el perímetro de los polígonos que la forman, todos son regulares de 2.5 cm de lado.
   c) Elisa quiere hacer 22 copias de su dibujo y a cada uno le quiere pegar un cordón de seda amarillo por el perímetro del polígono que está al centro y rojo alrededor de los otros polígonos. Donde ya puso amarillo ya no pone rojo. ¿Cuánto cordón necesita de cada color?

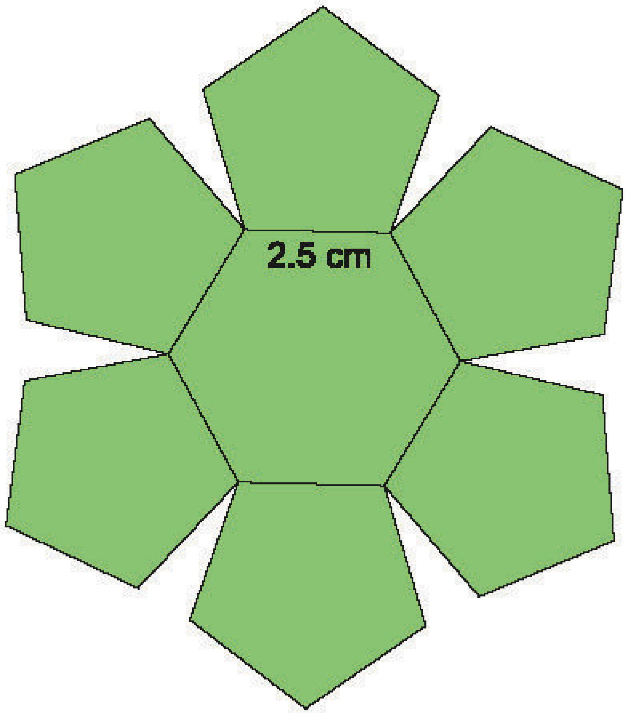


Figura 17.2 Diseño de Elisa

ω Sigan trabajando en equipos. Necesitarán un juego de geometría, regla graduada, cartulina y colores. Cada equipo hará una copia de la figura en cartulina, en lugar de hilo de seda remarquen los lados de los polígonos con el color que prefieran.

Sesión 2. Del perímetro de polígonos regulares al perímetro del círculo

Trabajen en parejas. Necesitarán juego de geometría y transportador.

α

1. En su cuaderno, tracen seis círculos de 5 cm de radio. En el primero inscriban un hexágono y en los siguientes un octágono, nonágono, decágono, dodecágono y un icoságono (esto es, un polígono de 20 lados). Todos los polígonos deben ser regulares, si no recuerdan las medidas de los ángulos centrales pueden volver a calcularlos.

   a) Calculen el perímetro de cada uno de los polígonos que dibujaron.

   b) Escriban en orden el perímetro de los polígonos desde el menor hasta el mayor.

   c) ¿Cuánto mide el diámetro de los círculos?

   d) Completen la tabla 17.1 usando los polígonos que trazaron. En la primera columna se escribe el nombre del polígono; en la segunda deben escribir el perímetro del polígono correspondiente y en la tercera el cociente del perímetro entre el diámetro de la circunferencia circunscrita. Ordenen los polígonos de de menor a mayor. En la tabla 17.1, P denota al perímetro y d el diámetro del círculo.

Tabla 17.1 Perímetro y cociente de polígonos

Polígono	P (cm)	Cociente $\frac{P}{d}$

El perímetro P de un círculo de radio r es igual a $2\pi r$.

d) Observa la tabla 17.1. ¿Qué sucede con el perímetro de los polígonos conforme aumenta el número de lados de los polígonos respecto a la circunferencia?

____

e) ¿Cuál de los perímetros de los polígonos se acerca o aproxima más al del círculo? _______________

Trabajen en parejas.

2. Ángel es repartidor y para su trabajo usa una bicicleta rodada 28. La rodada de una bicicleta es el diámetro exterior de la rueda, como muestra el segmento rojo en la figura 17.3.

Figura 17.3 Bicicleta rodada 28

a) ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de las ruedas de la bicicleta de Ángel? _______________

b) Al dar vuelta a los pedales, la rueda de la bicicleta gira, una vuelta de 360° a los pedales hace girar la rueda una vuelta completa. ¿Cuántas veces debe dar vueltas completas a los pedales para avanzar 100 metros? Aproximen a enteros. _______________

c) Si Ángel recorre un promedio de 5 km al día para hacer sus entregas, ¿cuántas veces pedalea vueltas completas? _______________

3. Para resolver el siguiente problema tracen lo que se describe en cada paso.

a) El jardín de una glorieta es de forma circular. La circunferencia que lo delimita mide 4 metros de radio. ¿Cuál es el perímetro del jardín?

b) Se inscribe un hexágono regular en el círculo y éste se divide en seis triángulos cuyos vértices coinciden con los del hexágono y otros coinciden en el centro de la circunferencia. Midan los lados de cada triángulo, ¿qué observan?

c) ¿Cuál es el perímetro del hexágono? _______________

4. Marcia mide su balón de fútbol por su parte más ancha con un cordón y el resultado son 69 cm, ¿cuánto mide el diámetro del balón? ____________________

____

5. Uno de los telescopios más grande del mundo es el FAST, que se encuentra en China y cuyo lente tiene un diámetro de 500 m. ¿Cuál es su perímetro? __________

____

En parejas reflexionen sobre lo siguiente.

6. Al usar el número π en cálculos prácticos, siempre se usa una aproximación. En este libro se ha decidido usar 3.14, en otros libros se usa 3.1416. Si tienen a la mano una calculadora científica ésta les da otra aproximación de π.

   a) Escriban la aproximación de π dada por su calculadora con todas las cifras que ahí aparecen. ____________________

   b) Obtengan el perímetro del lente del telescopio FAST usando el valor de π en su calculadora. Redondeen a una cifra decimal. Escriban aquí su resultado.

____

Sesión 3. Área de polígonos regulares

Trabajen en parejas.

1. Lean la información y realicen lo que se pide después.

La **apotema** de un polígono es la distancia más corta entre su centro y cualquiera de sus lados (ver figura 17.4)

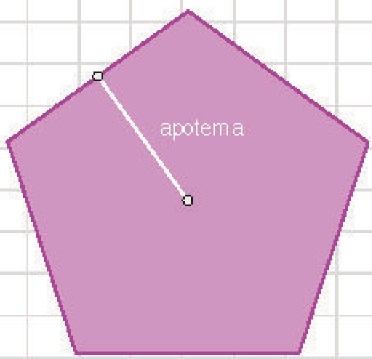


Figura 17.4 Representación gráfica de la apotema

   a) Observen la figura 17.1 de la sección *Una mirada previa* al inicio de esta secuencia. ¿Qué división del polígono sugiere esa imagen? ____________________

____

   b) Para calcular el área del pentágono, ¿qué datos necesitarían? ____________

____

c) Tracen la altura de los triángulos en los que queda dividido el pentágono de la figura 17.4. ¿A qué es igual la altura? ______

d) Expresen con literales cuál es el área de cualquiera de los cinco triángulos de la figura 17.4, usa *L* para lado y *a* para apotema. ______

e) ¿Cuántos triángulos forman el pentágono? Expresen con las mismas literales el área del pentágono. ______

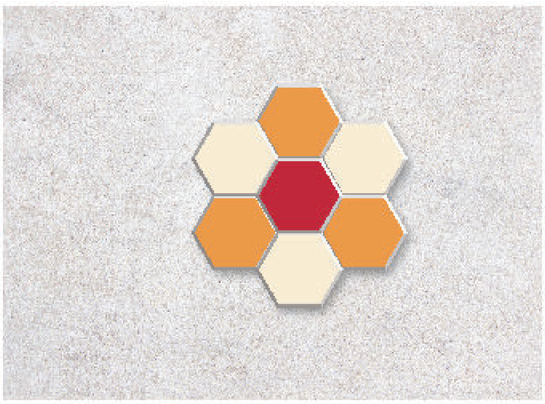
Retomando una mirada previa

Usen el procedimiento del problema 1 incisos **c)** a **e)** para resolver el problema de la sección una mirada previa.

1. Obtengan el área de un pentágono de 1.2 m de lado y apotema de 0.83 m. Comparen su respuesta con lo que contestaron originalmente. Si hay algo que cambiar corríjanlo y escriban el resultado correcto. ______

Sigan trabajando en parejas

2. Observen la figura 17.5. A la izquierda se muestra un arreglo de siete mosaicos que juntos suman un área de 1.136 m^2.
   a) Si el lado del mosaico mide 0.25 cm, ¿cuánto mide su apotema? ______
   b) Dividan el hexágono en triángulos como lo hicieron en el pentágono del ejercicio 1. ¿Cuál es el área de cada triángulo? ______



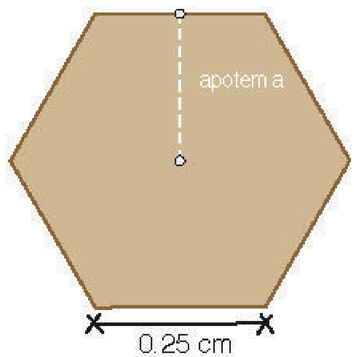


Figura 17.5 Arreglo de siete mosaicos hexagonales

   c) ¿Cuál es el área de uno de los mosaicos hexagonales? ______
   d) Una caja contiene 30 mosaicos. ¿Cuál es el área que se puede cubrir con estos mosaicos? ______
   e) ¿El procedimiento que desarrollaron para calcular el área del pentágono y del hexágono se puede generalizar para polígonos de más lados? ______
   f) Expliquen cómo obtendrían el área de un dodecágono. ______
   g) Expliquen cómo obtendrían el área de un polígono de *n* lados. ______

3. Usen GeoGebra para dibujar pentágonos y hexágonos regulares. Obtengan las medidas de sus lados, de su apotema y del área. Comprueben que las fórmulas que conjeturaron funcionan con estos ejemplos.

El área A de un polígono regular de n lados, cuyo lado mide L y la apotema a, es $A = \frac{nLa}{2}$.

4. En equipos de cuatro reflexionen cómo se puede relacionar el perímetro con el área de un polígono de n lados.

Sesión 4. Área del círculo

Trabajen en parejas.

1. Revisen el resultado que enunciaron en la actividad 1 inciso b de la sesión 2.
   a) ¿Qué idea sugiere si en lugar de considerar el perímetro de los polígonos se considera el área?

Sigan trabajando en parejas.

2. Martha encontró en un libro una figura como la que se muestra en la figura 17.6.
   a) Describan la imagen y comparen las áreas de las dos figuras que ahí aparecen, ¿qué relación encuentran entre l y p? ¿Cuál es la atura de los triángulos?

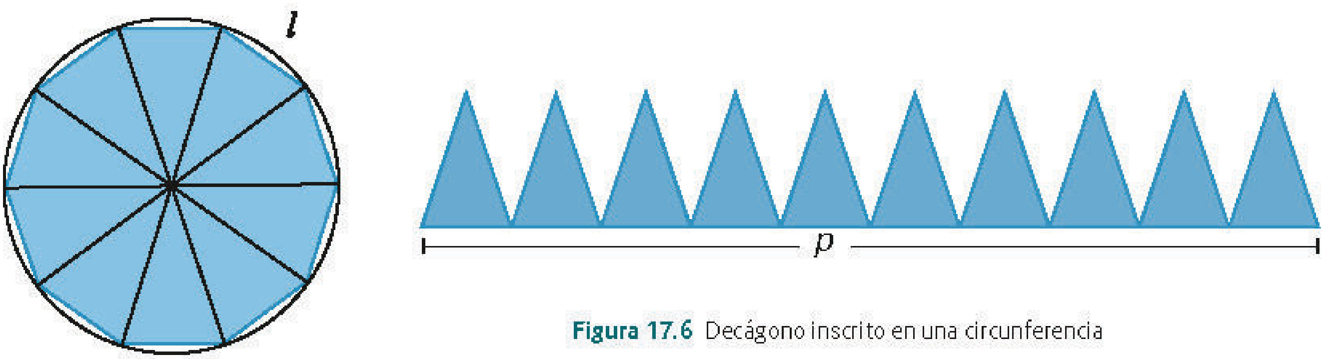


Figura 17.6 Decágono inscrito en una circunferencia

   b) Si en la imagen del polígono desenrollado se insertaran triángulos congruentes pero invertidos para llenar los huecos, ¿qué figura se formaría y cuál sería su área?

c) Imaginen que, en lugar de un decágono en el mismo círculo, se inscribe un icoságono.

- ¿Cómo se verían los triángulos y cuántos serían? ______________________
- ¿Qué perímetro se aproximaría más al del círculo, el del decágono o el del icoságono? ______________________
- ¿Qué área se aproximaría más al del círculo, el del decágono o el del icoságono? ______________________

d) Imaginen que se siguen aumentando lados al polígono. Describan lo que pasaría con su perímetro y su área. ______________________

____

e) Hagan una conjetura sobre cómo obtener el área del círculo. ______________________

____

f) En la figura 17.6 el perímetro del polígono P es la base de un rectángulo de altura r, donde r es el radio de la circunferencia inscrita.

Para completar el rectángulo se rellenan los triángulos que quedan de cabeza. Completa el enunciado:

El área del rectángulo es $A =$ ________, pero el área de la figura 17.6 es sólo la mitad. Por lo que el área del polígono es $A = \frac{Pr}{2}$, donde r es el radio del círculo en el que está inscrito el polígono.

La expresión algebraica para el área A de un círculo de perímetro P es $A = \frac{Pr}{2}$, pero sustituyendo P por $2\pi r$, queda $A = \pi r^2$.

Resuelvan individualmente.

Autorregulación

3. En la tabla 17.2 se presenta una lista de enunciados. En la columna derecha escriban un número del 1 al 5 para calificar el grado en el que están de acuerdo con cada enunciado, donde 1 significa "no estoy de acuerdo en absoluto", y el grado de acuerdo aumenta hasta llegar a 5 que significa "estoy totalmente de acuerdo".

Tabla 17.2 Calificación personal de las actividades efectuadas

Enunciado	Calificación
1. Al inicio de esta secuencia recordaba con claridad lo que es el perímetro de una figura geométrica.	
2. Lo que recordaba sobre el perímetro me sirvió de apoyo para comprender lo que se vio de perímetro en esta secuencia.	
3. Al inicio de esta secuencia recordaba con claridad lo que es el área de una figura geométrica.	
4. Lo que recordaba sobre el área me sirvió de apoyo para comprender lo que se vio en esta secuencia sobre el área.	
5. Al inicio de esta secuencia recordaba el número π.	

4. Kepler descubrió un método para calcular el área de un círculo.
En las siguientes ligas, aparecen animaciones que ilustran el método de Kepler. La primera liga es interactiva, pueden aumentar el número de divisiones del círculo y cada vez correr la animación para ver cómo se va aproximando el área del círculo. Visiten estas páginas y discutan con el grupo las similitudes que encuentren con el tema que se estudió a lo largo de esta secuencia.

http://www.matematicasvisuales.com/html/historia/kepler/keplercirculo.html

https://pseudopodo.wordpress.com/2012/03/26/como-calcular-el-area-del-circulo-y-como-no-explicarlo/ (Consulta: 29 de junio de 2018.)

* En sesión plenaria se pueden ver estos videos. Si no es posible, socialicen sus conjeturas y escriban las fórmulas que utilizaron a lo largo de la sesión.

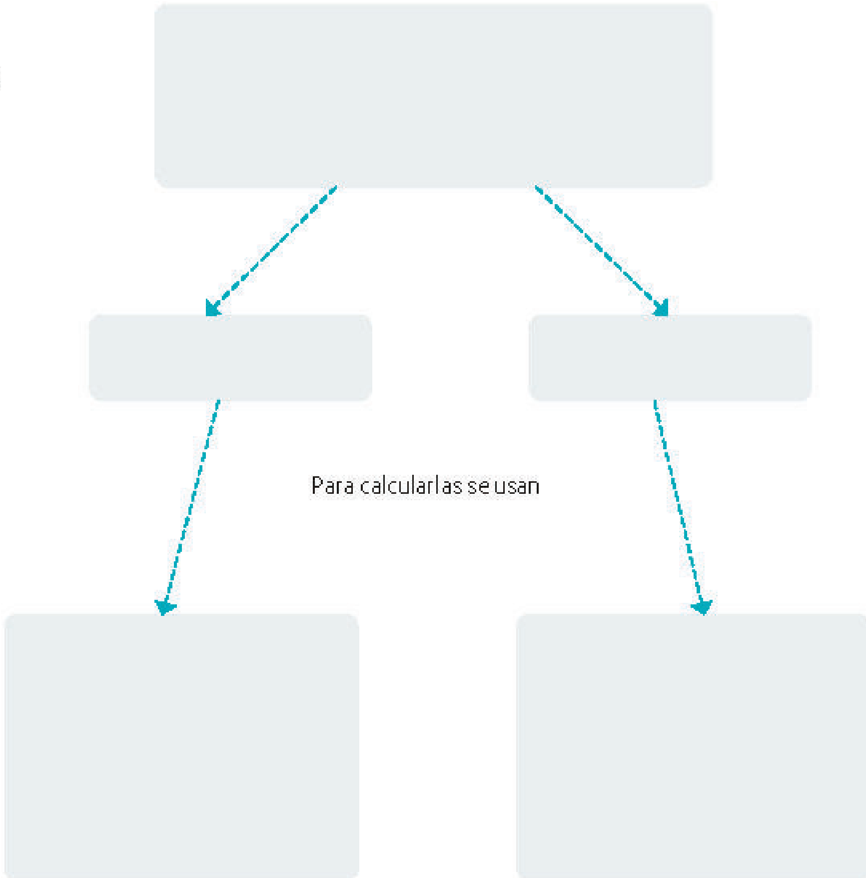
En retrospectiva

En esta secuencia de cuatro sesiones se estudiaron los siguientes conceptos.

- Perímetro de polígonos.
- Perímetro del círculo.
- Área de polígonos.
- Área del círculo.
- Y las fórmulas para obtenerlos:
  - $P = nl$
  - $P = \pi d$
  - $A = \frac{Pa}{2}$
  - $A = \pi r^2$

Coloquen cada texto de la lista anterior en los espacios vacíos del esquema 17.1 de la siguiente página, de modo que el mapa conceptual exprese correctamente las relaciones entre conceptos.

Esquema 17.1 Mapa conceptual sobre el área y perímetro de polígonos regulares y círculos



¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente. Usen su calculadora si lo requieren.

1. La luz de un faro barre con su luz 360° y el alcance de su luz es de 1 100 m. ¿Qué superficie cubre la iluminación del faro? ____________________

2. Una glorieta de 150 m de radio tiene una pista de carreras alrededor de toda la máxima circunferencia. ¿Cuánto mide la pista? ____________________

3. Una pared está totalmente cubierta por 56 octágonos regulares de 0.15 m de lado y 0.18 m de apotema.

   a) ¿Cuál es el perímetro de cada mosaico? ____________________

   b) ¿Cuál es la superficie de la pared? ____________________

* Analicen sus respuestas y su sentido en el contexto del problema correspondiente. Imaginen la situación o hagan un dibujo que represente el problema que les ayude a decidir si sus respuestas son plausibles. Si tienen duda en alguna, vuelvan a hacer las operaciones con la calculadora.

Probabilidad clásica

BLOQUE 3
S18

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Reúnanse en parejas, analicen la situación y hagan lo que se pide.

1. En el juego “Piedra, papel o tijera”, participan dos personas para decidir quién de ellas gana algo. Consiste en contar uno, dos y tres, y a la tercera cada uno de los participantes pone la mano al mismo tiempo en una de tres posibles posiciones. Observen la figura 18.1.

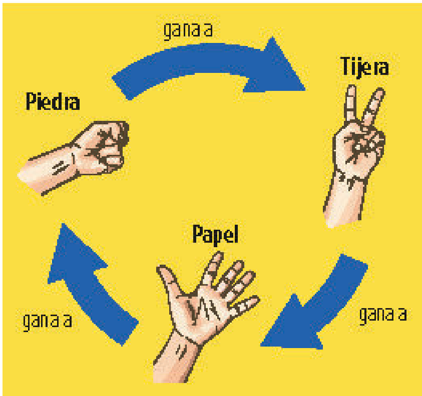


Figura 18.1 Representación del juego "Piedra, papel o tijera"

- Mostrar el puño cerrado significa piedra.
- Poner los dedos índice y medio extendidos y los otros recogidos significa tijera.
- Poner la mano abierta y los dedos extendidos significa papel.

Como se muestra en la figura 18.1, el papel le gana a la piedra, porque la envuelve; la piedra le gana a la tijera, porque la rompe, y la tijera le gana al papel, porque lo corta. En caso de que ambos abran la mano en una misma posición es empate.

a) Si Alejandra y Pedro deciden jugar, ¿de cuántas formas diferentes puede ser el resultado de un juego? ______

b) En su cuaderno, organicen todos los posibles resultados en una tabla.

c) ¿Cuántos resultados son favorables a Alejandra? ¿Y cuántos a Pedro?

______

d) ¿Cuántos resultados conducen a un empate? ______

e) ¿El juego es justo? Expliquen. ______

______

______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten. En caso de que siga habiendo dudas, continúen trabajando en la secuencia y al final vuelven a revisar el problema.

Sesión 1. Fenómenos aleatorios y experiencias aleatorias

α En parejas, analicen la situación y hagan lo que se indica.

1. Lean y comenten la siguiente noticia publicada en el diario *El País* el 17 de diciembre de 2014; después hagan lo que se pide.

Sin resultados firmes de los fármacos experimentales contra el ébola

Ninguno de los siete tratamientos experimentales contra el ébola cuyo desarrollo se ha acelerado (o iniciado) a raíz del brote de África Occidental ha dado hasta el momento resultados en cuanto a su seguridad y, mucho menos, su eficacia, según ha informado a través de su web la Agencia Europea de Medicamentos (EMA, por sus siglas en inglés). La epidemia se ha cobrado ya casi 7000 muertos.

"Los tratamientos para los pacientes infectados por el virus ébola están todavía en sus fases iniciales de desarrollo", afirma Marco Cavaleri, jefe de Antiinfecciones y Vacunas de la EMA. "Animamos a los desarrolladores a que generen más información sobre el uso de esas medicinas en el tratamiento del ébola. Revisaremos toda información nueva tan pronto como esté disponible para ayudar en la respuesta a esta crisis de salud pública".

Entre los siete medicamentos que se están investigando está el famoso zmapp que se usó en EU o el antiviral favipiravir que se empleó con la auxiliar sanitaria Teresa Romero. Ya en su momento los médicos que lo utilizaron afirmaron que era imposible saber qué efecto habían tenido en la curación de los afectados (cuando éstos sanaron) ya que se los trató con todo lo posible ante una situación desesperada, y que en África, donde no hay acceso a estos fármacos ni a muchos otros recursos, un 30% de los infectados por el ébola sobreviven.

Fuente: https://elpais.com/elpais/2014/12/16/ciencia/1418750823_914342.html

a) ¿Cuál es la principal idea de la noticia? ____________________

b) Si se observa "el efecto de alguno de los 7 medicamentos en la curación de los enfermos" ¿Se puede predecir de antemano cuál va a ser el resultado? Argumenten su respuesta. ____________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten su propuesta hasta llegar a un acuerdo. Si los términos aleatorio y determinístico no les quedan claros, continúen con el estudio de la sesión y vuelvan más tarde a este problema.

Un **fenómeno aleatorio** es cualquier fenómeno en el que no se pueden predecir sus resultados. En cambio, se llaman **fenómenos determinísticos** aquellos cuyos resultados se pueden anticipar de manera precisa. En la vida diaria se observan o viven muchos fenómenos, algunos de ellos son aleatorios y otros determinísticos. En la siguiente actividad tendrás la oportunidad de pensar en la naturaleza de algunos fenómenos simples.

Actividad

Formen nuevas parejas y hagan lo que se pide.

2. En la tabla 18.1 se ofrece una breve descripción de 10 fenómenos, unos aleatorios y otros determinísticos. Escriban en la columna derecha "aleatorio" o "determinístico", según lo acuerden después de comentar sus características.

Tabla 18.1 Fenómenos aleatorios y determinísticos

	Descripción de un fenómeno	Fenómeno aleatorio o determinístico
A.	Soltar un objeto de una altura determinada en el vacío y medir el tiempo que tarda en llegar al suelo.	
B.	El resultado de observar el número de goles que habrá en el próximo partido de futbol entre América y Guadalajara.	
C.	El resultado de lanzar una moneda y observar la cara que muestra hacia arriba cuando queda en el suelo (lanzar un volado).	
D.	El resultado de observar el color de los restos de quemar un pedazo de madera.	
E.	El resultado de contar el número de robos que se denuncian en la ciudad de Monterrey en un día.	
F.	El resultado de contar las posibles combinaciones de ropa que se pueden formar con tres blusas y cuatro faldas.	
G.	Observar el color que adquiere el agua caliente dentro de una taza al agregarle una cucharada sopera de café en polvo.	
H.	Se tira un dado y se observa la cara que muestra hacia arriba cuando queda en el piso.	
I.	Observar el estado del agua (líquido, sólido o gaseoso) cuando se enfría a una temperatura inferior a los cero grados Celsius.	
J.	Observar el número de mosaicos de 30 cm × 30 cm que cubren el piso de una habitación de 6 m × 6 m.	

a) De los fenómenos que viven o ven en su vida diaria, propongan dos que sean aleatorios y dos determinísticos. Argumenten sus respuestas. ______________________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen sus razonamientos y lleguen a un acuerdo. Opinen sobre los ejemplos que cada equipo propuso como fenómenos aleatorios o determinísticos. ¿Están de acuerdo con lo que propuso el otro equipo respecto a la aleatoriedad de los fenómenos? Comenten y discutan sus dudas en caso de haberlas.

En otras palabras

La **aleatoriedad** se asocia a todo proceso cuyo resultado no es previsible, más que por lo que toca a la intervención del azar. El resultado de toda experiencia aleatoria no puede determinarse con precisión en ningún caso antes de que ésta se produzca. El estudio de las experiencias aleatorias queda dentro del ámbito de la teoría de la probabilidad y, en un marco más amplio, en el de la estadística.

En la naturaleza y en la sociedad se presentan innumerables fenómenos aleatorios de gran complejidad, por lo que su estudio se reserva a la especialidad de la ciencia correspondiente, como el caso visto al comienzo de la sesión acerca la enfermedad del ébola. Este problema lo estudia la epidemiología, un área especializada de la medicina. Pero cualquier ciencia que estudia un fenómeno aleatorio de su competencia se apoya en la **teoría matemática de la probabilidad**. En esta secuencia continuarán con el estudio básico de los elementos de esta teoría.

Las **experiencias aleatorias** son una clase más simple de fenómenos aleatorios que pueden ser estudiados por la probabilidad y tienen la siguiente definición.

Una **experiencia aleatoria** es un fenómeno aleatorio que cumple con las siguientes condiciones:

1. Se puede repetir bajo las mismas condiciones.
2. En cada repetición no se puede predecir con exactitud el resultado de la experiencia.
3. Se puede identificar un conjunto bien definido de posibles resultados.

La primera condición se llama "repetibilidad"; la segunda, "aleatoriedad", y la tercera se denomina "la existencia de espacio muestral" o simplemente "espacio muestral". En la siguiente actividad podrán ofrecer las razones por las que algunos de esos fenómenos son experimentos aleatorios y otros no.

Actividad

3. Digan cuáles fenómenos de la tabla 18.2 son experimentos aleatorios y señalen qué condición no cumplen los que no lo son.

Tabla 18.2 Condiciones para que un fenómeno sea aleatorio

	Descripción del fenómeno	¿Es experiencia aleatoria?	En caso de que no, ¿qué condición no cumple?
1	Se tira un dado y se observa el número de la cara que cae hacia arriba.		
2	El desprendimiento de la península de Baja California del continente.		
3	Se extrae sin ver (al azar) una bola de una urna con dos bolas, una blanca y una negra, y se observa el color de la bola que sale.		

4	Se saca sin ver (al azar) una bola de una urna con dos bolas negras, y se observa el color de la bola que sale.		
5	Se observa lo que va a pasar mañana.		

Describan dos experiencias aleatorias diferentes a las mencionadas en la tabla.

____

____

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus propuestas y lleguen a un acuerdo.

Formen parejas y hagan lo que se pide.

ω

4. Preparen una exposición que cumpla las siguientes condiciones y respondan las preguntas.

   a) Mostrar en qué son comunes y en qué difieren los conceptos de fenómeno aleatorio y experiencia aleatoria. ¿Qué características de una experiencia aleatoria podría no cumplir un fenómeno aleatorio? _______________

   ____

   ____

   b) ¿Por qué es importante el estudio de las experiencias aleatorias? _______________

   ____

   ____

   c) Hagan una reunión grupal y expongan. El profesor elegirá a los estudiantes que deben exponer.

Sesión 2. Espacio muestral, eventos y probabilidad

α

1. Tres compañeros Laura, María y Néstor van a decidir quién se queda con un trofeo que ganaron en una competencia en que formaron equipo. Para esto, deciden jugar a lanzar dos monedas y observar las caras que ocurren. Uno de ellos propone los siguientes eventos en términos del número de soles que aparecen.

   - A = "Que no salga ningún sol"
   - B = "Que solamente salga un sol"
   - C = "Que salgan dos soles"

a) a) Antes de lanzar las monedas, ¿se puede predecir con exactitud el evento que va a ocurrir? ¿Por qué? ____________________

b) Si antes de realizar el experimento pudieran elegir alguno de los anteriores eventos para ganar el premio, ¿cuál elegirían? ¿Les daría igual? Expliquen por qué. ____________________

c) Laura gana si ocurre el evento A, María gana si ocurre el evento B y Néstor gana si ocurre el evento C.

- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Laura? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane María? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Néstor? ____________________

d) ¿El juego sería justo? ¿Por qué? ____________________

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas y arguméntenlas lo más posible, lleguen a un acuerdo sobre las mejor respuesta. En caso de que tengan dudas sobre alguna respuesta, sigan con el estudio de la lección y vuelvan al problema más tarde.

σ

La tercera condición que define a una experiencia aleatoria es que se puedan describir todos los posibles resultados del experimento. A la lista de todos los resultados posibles se le llama **espacio muestral**. Una cuestión muy importante es evaluar si los resultados de la lista del espacio muestral de un experimento aleatorio tienen la misma oportunidad de ocurrir, es decir, que un resultado del experimento sea tan propenso a ocurrir como cualquier otro resultado del mismo experimento. En situaciones de juegos de azar se puede determinar si los resultados tienen o no las mismas oportunidades de ocurrir examinando las características físicas del juego. En cambio, hay otras situaciones en las que no es posible saber de antemano si los resultados tienen la misma oportunidad de ocurrir y, en esos casos, se tienen que hacer experimentos repetidos para determinarlo. Cuando todos los resultados de un experimento aleatorio tienen las mismas oportunidades de ocurrir se dice que tiene un **espacio muestral equiprobable**. En la siguiente actividad podrás desarrollar esta idea.

Actividad

Formen parejas. En esta actividad tendrán que describir los resultados posibles y escribirlos en la notación dada; además, decidan si en cada caso el espacio muestral es equiprobable o no.

2. En la columna de la izquierda se describe una experiencia aleatoria, en la segunda columna describan el espacio muestral y en la tercera digan si el espacio muestral es equiprobable.

Tabla 18.3 Espacio muestral de varios eventos

	Descripción de un fenómeno:	Espacio muestral	¿Los resultados tienen las mismas oportunidades de ocurrir?
1.	Se lanza una moneda y se observa la cara que queda hacia arriba.		
2.	Se tira un dado bien balanceado y se observa la cara que queda hacia arriba.		
3.	Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes y dos amarillas. Se revuelven bien y se extrae una bola al azar y se observa su color.		
4.	En un grupo de la escuela hay 40 alumnos, de los cuales 23 son hombres y 17 son mujeres. Se elige un alumno al azar y se observa su género.		
5.	Alejandra y Pedro juegan "Piedra, tijera y papel". Se observa quien gana o si hay empate.		
6.	Se lanza una moneda y luego se vuelve a lanzar, se observa la secuencia de caras. Indica con "A" sale águila y con "S" sale sol.		

a) Si tuvieran que asignar un número para la probabilidad de que ocurra un resultado de una experiencia aleatoria cuyo espacio muestral es equiprobable, ¿cuál asignarían? __________

b) En cada uno de los siguientes casos, asignen la probabilidad que se les pide.

- En la experiencia aleatoria "Se lanza una moneda y se observa la cara que queda hacia arriba", ¿cuál es la probabilidad de obtener la cara águila? ¿Por qué? __________

- En la experiencia "Se tira un dado bien balanceado y se observa la cara que queda hacia arriba", ¿cuál es la probabilidad de obtener cara con el número 5? ¿Por qué? __________

- En la experiencia aleatoria: “Se lanza una moneda y luego se vuelve a lanzar, se observa la secuencia de caras”. Indica con A si sale águila y con S si sale sol. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos águilas? ¿Por qué? ______
____

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas.

En una experiencia aleatoria en la que cualquiera de sus resultados tiene la misma oportunidad de ocurrir el **espacio muestral es equiprobable**. En este caso, la **probabilidad de cualquier resultado es** $\frac{1}{n}$, donde **n** es el número de elementos que tiene el espacio muestral.

Actividad

Resuelvan individualmente.

3. En cada caso, llenen la tabla asignando las probabilidades correspondientes a cada resultado, al final sumen todas las probabilidades de los resultados de la tabla correspondiente.

a) Se lanza una moneda y se observa la cara que queda hacia arriba.

Resultado	A	S	Suma
Probabilidad			

b) Se tira un dado bien balanceado y se observa la cara que queda hacia arriba.

Resultado	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilidad							

c) Se lanza una moneda y luego se vuelve a lanzar, se observa la secuencia de caras. Indica con A si sale águila y con S si sale sol.

Resultado	AA	AS	SA	SS	Total
Probabilidad					

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten su procedimiento hasta llegar a un acuerdo.

Dada una experiencia aleatoria se puede estar interesado en observar dos o más resultados, por esta razón, se llama **evento** a la agrupación de varios resultados. Se dice que un evento ocurre si al realizar el experimento ocurre alguno de los resultados que lo constituyen. Por ejemplo, consideren el experimento de lanzar un dado y ver la cara que ocurre. Al definir el evento *B* como "que salga una cara con un número par de puntos", entonces el evento B ocurre cuando sale 2, cuando sale 4 o cuando sale 6; esto se suele indicar como sigue B={2, 4, 6}. Se dice entonces que el resultado 2 es favorable al evento *B*, que el resultado 4 es favorable al evento *B* y que el resultado 6 es favorable al evento *B*. Si al lanzar el dado ocurre alguno de los resultados favorables a *B*, por ejemplo, el número 2, se dice que el evento *B* ocurrió; lo mismo se dice si ocurre el número 4, o si ocurre el número 6. En cambio, si ocurre el 1, el 3 o el 5, se dice que **no ocurrió el evento B**. Lo anterior permite dar la siguiente definición de probabilidad.

Dada una experiencia aleatoria y un evento *A*, la probabilidad de un evento *A* se denota con la expresión *P*(*A*) y se define así:

$$P(A) = \frac{\text{Resultados favorables al evento A}}{\text{Número de resultados posibles}}$$

Es importante mencionar dos eventos especiales: El **evento imposible** y el **evento seguro**. El primero, es cualquier resultado que no puede ocurrir; por ejemplo, el evento de "obtener el número 30 a lanzar un dado" es imposible. El **evento seguro** es el formado por todos los resultados del espacio muestral.

La probabilidad del evento imposible es **cero**, mientras la probabilidad del evento seguro es **1**.

Problemas

En cada inciso se define una experiencia aleatoria y se proponen algunos eventos. Con base en esta definición y en lo visto antes, resuelvan individualmente los siguientes problemas.

4. Se arroja un dado y se observa el resultado. Consideren la definición de los eventos A, B, C y D y encuentren sus probabilidades y exprésenlas con la notación adecuada, como en el ejemplo, y en forma de fracción simplificada.

   A = "Cae la cara con 6 puntos" $P(A) = \frac{1}{6}$

   B = "Cae una cara con 4 o con 6 puntos" ______________

   C = "Cae una cara con un número par de puntos" ______________

   D = "Cae una cara con 10 puntos" ______________

5. Tres personas, Adriana, Benjamín y Carolina, organizan entre ellos la rifa de un teléfono celular, para esto, se reparten 10 boletos numerados del 0 al 9. A Adriana le tocan los boletos con números 0, 3, 5, 7; a Benjamín le tocan los boletos con los números 1, 2, 4 y a Carolina le tocan los boletos numerados 6, 8, 9. Se meten 10 bolas numeradas del 0 al 9 en una urna y se saca una bola al azar; gana quien tengan el boleto con el número de la bola que sale.

Determinen las probabilidades que se piden y exprésenlas con la notación adecuada y las probabilidades en forma decimal.

A: Adriana gana ____________________

B: Benjamín gana ____________________

C: Carolina gana ____________________

ω Formen parejas y hagan lo que se pide

6. Propongan una experiencia aleatoria en la que su espacio muestral sea equiprobable. Digan cuáles son los resultados que lo componen y sus probabilidades. Propongan al menos un evento con dos o más resultados y calculen su probabilidad.

   Preparen una exposición para presentar su trabajo en una puesta en común de todo el grupo. El profesor organizará las exposiciones.

Sesión 3. Probabilidades de experiencias de dos o más etapas

α

1. En una reunión llegan tres invitados con un paraguas que cuelgan en el perchero; además los paraguas son muy parecidos. De pronto, comienza un sismo y todos los reunidos deben salir del lugar en el que están reunidos. Los tres invitados cogen un paraguas al azar antes de salir corriendo.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres hayan tomado su propio paraguas? ____________________
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo uno haya tomado su propio paraguas pero los otros dos no? ____________________
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno haya tomado su propio paraguas? ____________________

* Reúnanse con otro equipo y comenten sus resultados. Digan cómo describieron el espacio muestral. Si tiene dudas sobre las soluciones, continúen el estudio de la sesión y vuelvan a este problema después.

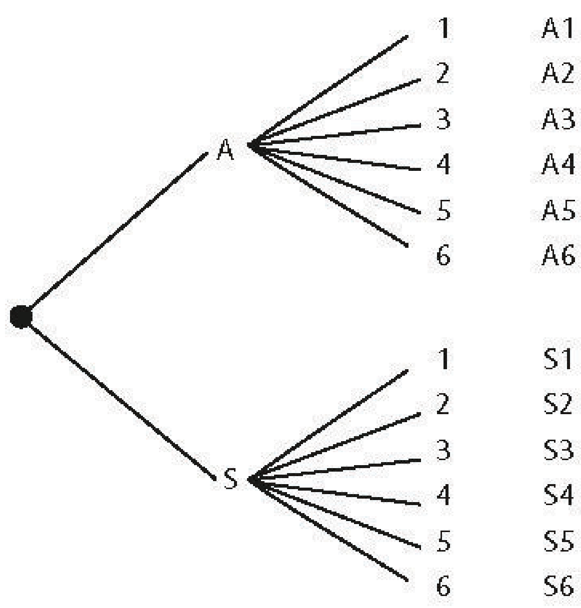
σ La realización de una experiencia aleatoria frecuentemente implica dos o más etapas de manera que el espacio muestral correspondiente se describe mediante parejas, ternas o sucesiones de muchos elementos ordenados. Por ejemplo, al considerar el experimento se lanzar una moneda y un dado y observar la pareja de resultados. ¿Cuál es el espacio muestral?

En casos como este y otros con mayor número de elementos, contar los elementos del espacio muestral requiere utilizar una técnica que permita asegurar que se cuentan todos los posibles resultados. Dos recursos para hacerlo son los diagramas rectangulares y los diagramas de árbol.

Diagrama rectangular. Para formar un arreglo rectangular se colocan los resultados de una etapa formando una columna (lanzar una moneda) y se colocan los resultados de la otra etapa (lanzar un dado) en una fila horizontal, de modo que formen los lados del arreglo rectangular. En las intersecciones de las filas y las columnas se forman las posibles parejas que pueden ocurrir:

	1	2	3	4	5	6
A	A1	A2	A3	A4	A5	A6
S	S1	S2	S3	S4	S5	S6

Diagrama de árbol. Consiste en líneas que salen de un punto, en la punta de cada uno de estas se representa el resultado de una etapa. Se pueden encontrar los resultados del mismo ejemplo con el siguiente diagrama de árbol:



Esquema 18.2 Diagrama de árbol

Problemas

Con los siguientes problemas podrán poner en práctica los anteriores recursos para encontrar las soluciones. Formen parejas y hagan lo que se pide.

2. Alejandra, Beatriz, Carlos, Daniela, Enrique y Flor juegan el siguiente juego. Hay dos urnas cada una con bolas numeradas del 1 al 3. Se saca una bola de cada urna y se suman. Si la suma es 1 gana Alejandra, si la suma es 2 gana Beatriz, etcétera.

a) Llenen el siguiente cuadro y obtengan todos los posibles resultados del experimento.

+	Primera extracción		
Segunda extracción	1	2	3
1			
2			
3			

b) Obtengan la distribución de probabilidades al llenar la siguiente tabla.

Evento	Gana Alejandra	Gana Beatriz	Gana Carlos	Gana Daniela	Gana Enrique	Gana Flor
Probabilidad						

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten su procedimiento hasta llegar a un acuerdo.

3. Se lanzan dos dados y se observa la diferencia del resultado mayor menos el resultado igual o menor.

a) Utilicen el siguiente cuadro para determinar todos los posibles resultados de la experiencia.

–	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

b) Describan el espacio muestral y llámenlo Ω. ________________________________

____

____

En otras palabras

El símbolo Ω es la letra griega omega. En probabilidad se utiliza para referirse al espacio muestral.

c) Calculen las probabilidades de cada resultado y exprésenlo como fracción simplificada en la siguiente tabla.

Diferencia entre el mayor y el menor	0	1	2	3	4	5
Probabilidad						

4. Analicen el experimento. Se lanza una moneda tres veces sucesivas y se observa el número de águilas que ocurren; después, hagan lo que se indica.
   a) En la segunda fila de la siguiente tabla, coloquen las ternas que cumplen con el valor de la variable "El número de águilas".

Número de águilas	0	1	2	3
Secuencias correspondientes				

   b) Calculen las probabilidades de cada valor de la variable y completen la tabla.

Número de águilas	0	1	2	3
Probabilidad				

Formen parejas y hagan lo que se pide.

5. Propongan una experiencia aleatoria de al menos dos etapas que no hayan visto en la secuencia.

   a) Encuentren su espacio muestral y la probabilidad de los resultados.

   b) Definan dos eventos que tengan más de un resultado y encuentren su probabilidad.

   c) Preparen una exposición para exponer en reunión grupal, en la que muestren su experiencia aleatoria, la distribución de probabilidades, eventos y sus probabilidades.

Autoconocimiento

6. Reflexionen y comenten sobre la manera en que realizan las actividades. En particular, respondan las preguntas con relación al tema de probabilidad de esta secuencia.

   a) ¿Le dedico suficiente tiempo a cada tarea o problema?

   b) Cuando voy a resolver un problema, ¿Pienso si ya he resuelto un problema semejante?

   c) Para resolver los problemas, ¿tengo la costumbre de anotar los datos y hacer un dibujo o esquema de la situación?

   d) Cuando no logro resolver un problema, ¿vuelvo a intentarlo después?

   e) ¿Siempre trato de comprobar la solución?

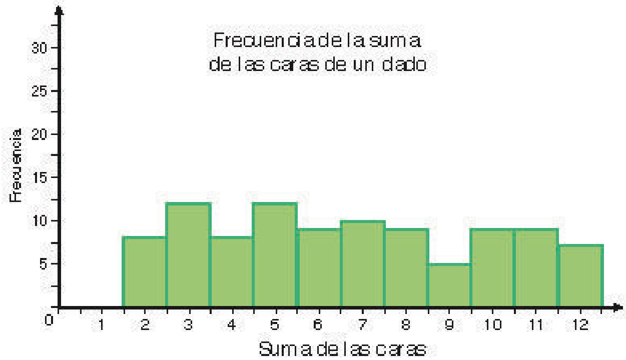
7. Si en una o más de las preguntas anteriores respondiste "No", piensa lo que deberías hacer para cambiar cada "No" por un "Sí".

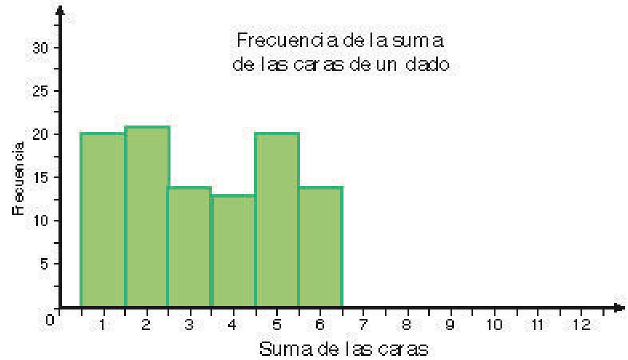
Sesión 4. Enfoque frecuencial y probabilidad clásica

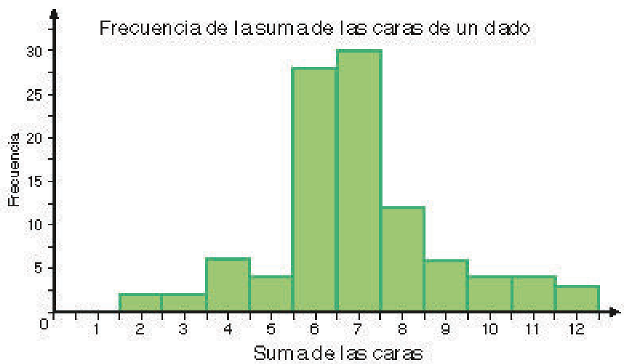
En pareja, analicen la situación y hagan lo que se solicita.

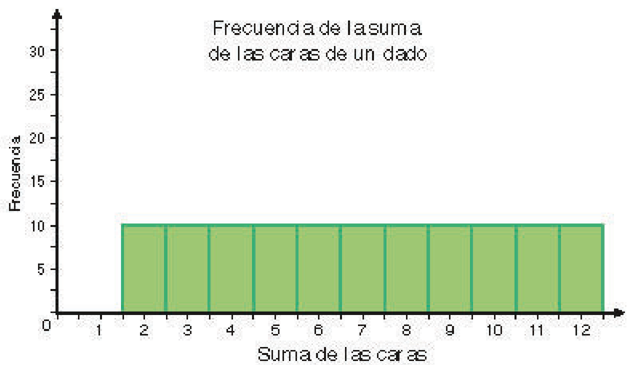
1. Se lanzaron 100 veces un par de dados; en cada lanzamiento, se calculó la frecuencia relativa de la variable: "la suma de las caras que resultaron en ambos dados"; después, estas frecuencias relativas se graficaron.

   a) ¿Cuál de las gráficas representa correctamente los resultados del experimento? Argumenten su respuesta.









b) Hagan el experimento, calculen las frecuencias y grafíquenlas en su cuaderno.

c) La gráfica que obtuvieron, ¿se parece a la que eligieron o se parece más a otra? ______

* Reúnanse con otro equipo y comparen sus gráficas. Noten que la forma general de las distribuciones es menos frecuencias en los extremos y más frecuencia en el centro.

En primer grado estudiaron las frecuencias relativas de un evento: éstas tienen la propiedad de que se acercan a la probabilidad cuando el número de repeticiones es grande. En la siguiente actividad podrán constatar esta propiedad.

σ

Actividad

Formen equipos de tres integrantes y hagan lo que se pide.

2. De una urna que contiene tres bolas de las cuales dos son blancas y una negra se saca una bola al azar, se registra su color, se devuelve y se mezclan las bolas en la urna.

   a) ¿Hacia cuál valor consideran que se van a acercar las frecuencias relativas?

   ______

b) Repitan esta experiencia 20 veces y anoten el resultado en la segunda fila de la tabla, en la tercera anoten la frecuencia relativa del evento "Sale bola negra".

Numero de experiencia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Frecuencia relativa										

Número de experiencia	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado										
Frecuencia relativa										

c) ¿Se aproxima la frecuencia relativa a la probabilidad? ______________________

____

* Reúnanse con otro equipo y comenten sus resultados. ¿Quién obtuvo mejor aproximación? Intercambien los procedimientos que llevaron a cabo e identifiquen en qué momento se dieron las diferencias entre ellos.

Problemas

Resuelvan los problemas en parejas.

3. En los registros de un hospital de México se observó el grupo sanguíneo de 12 371 pacientes. Los resultados quedaron distribuidos como se muestra en la tabla 18.4.

Tabla 18.4 Registro del grupo sanguíneo de varios pacientes

Tipo sanguíneo	O^+	O^-	A^+	A^-	B^+	B^-	AB^+	AB^-	Total
No. de pacientes	6 927	618	3 711	124	495	125	309	62	12 371

Si un nuevo paciente llega al hospital, ¿cuál es aproximadamente la probabilidad de que se grupo sanguíneo sea...

a) O^+? ______________________

b) A^+? ______________________

c) AB? ______________________________

d) Completen la tabla con las probabilidades de los ocho grupos de tipo sanguíneo.

Tabla 18.5 Probabilidad en el tipo sanguíneo de un paciente

Tipo sanguíneo	O^+	O^-	A^+	A^-	B^+	B^-	AB^+	AB^-	Total
Probabilidad									

e) ¿Saben cuál es su tipo de sangre? ____________ En caso de que no lo sepan, ¿de qué grupo sanguíneo es más probable que sean? (Propongan dos grupos.) ____________

f) Si sí saben cuál es su grupo sanguíneo, trabajen con un compañero que no lo sepa.

g) Si no saben cuál es su grupo sanguíneo, ¿cuál es la probabilidad de que sean AB^-?

____

La **probabilidad clásica** de un evento *A* se calcula mediante la fórmula:

$$P_{\text{Clásica}}(A) = \frac{\text{Resultados favorables al evento } A}{\text{Número de resultados posibles}}$$

En general, no son iguales ambas probabilidades, no obstante, se puede constatar que cuando son muchas (por ejemplo 100 o más) las repeticiones del experimento para calcular la probabilidad frecuencial, ambas probabilidades son muy cercanas, es decir:

$$P_{\text{Clásica}}(A) \approx P_{\text{frecuencial}}(A), \text{ cuando se repite muchas veces el experimento.}$$

Esta relación es muy importante, y se puede constatar realizando muchos experimentos de experiencias aleatorias, como la de lanzar una moneda o un dado.

Retomando una mirada previa

Formen parejas y hagan lo que se pide.

1. Recuerden el juego de "Piedra, Tijera o Papel" al que juegan Alejandra y Pedro.
   a) ¿Están de acuerdo en que el juego es una experiencia aleatoria? ¿Por qué?

   ____

   b) ¿Cómo pueden representar los resultados del juego? Elijan la opción correcta.
   - Mediante números: el número 1 si se gana y el número 0 si se pierde.
   - Mediante las parejas ordenadas formadas con las palabras "Piedra", "Tijera" o "Papel"; por ejemplo, (Piedra, Tijera) significa que Alejandra puso la mano "piedra" y Pedro puso la mano "Papel".
   - Mediante dibujos de una piedra, una tijera o un papel.

c) Hagan en su cuaderno, un diagrama árbol para describir y contar todos los posibles resultados, es decir, describan el espacio muestral.

d) Con base en lo anterior, completen la tabla 18.6 (observen el ejemplo).

Tabla 18.6 Posibles resultados del juego "Piedra, papel o tijera"

Alejandra	Pedro	Resultado
Piedra	Piedra	Empate

e) Con base en la tabla, calculen las probabilidades.

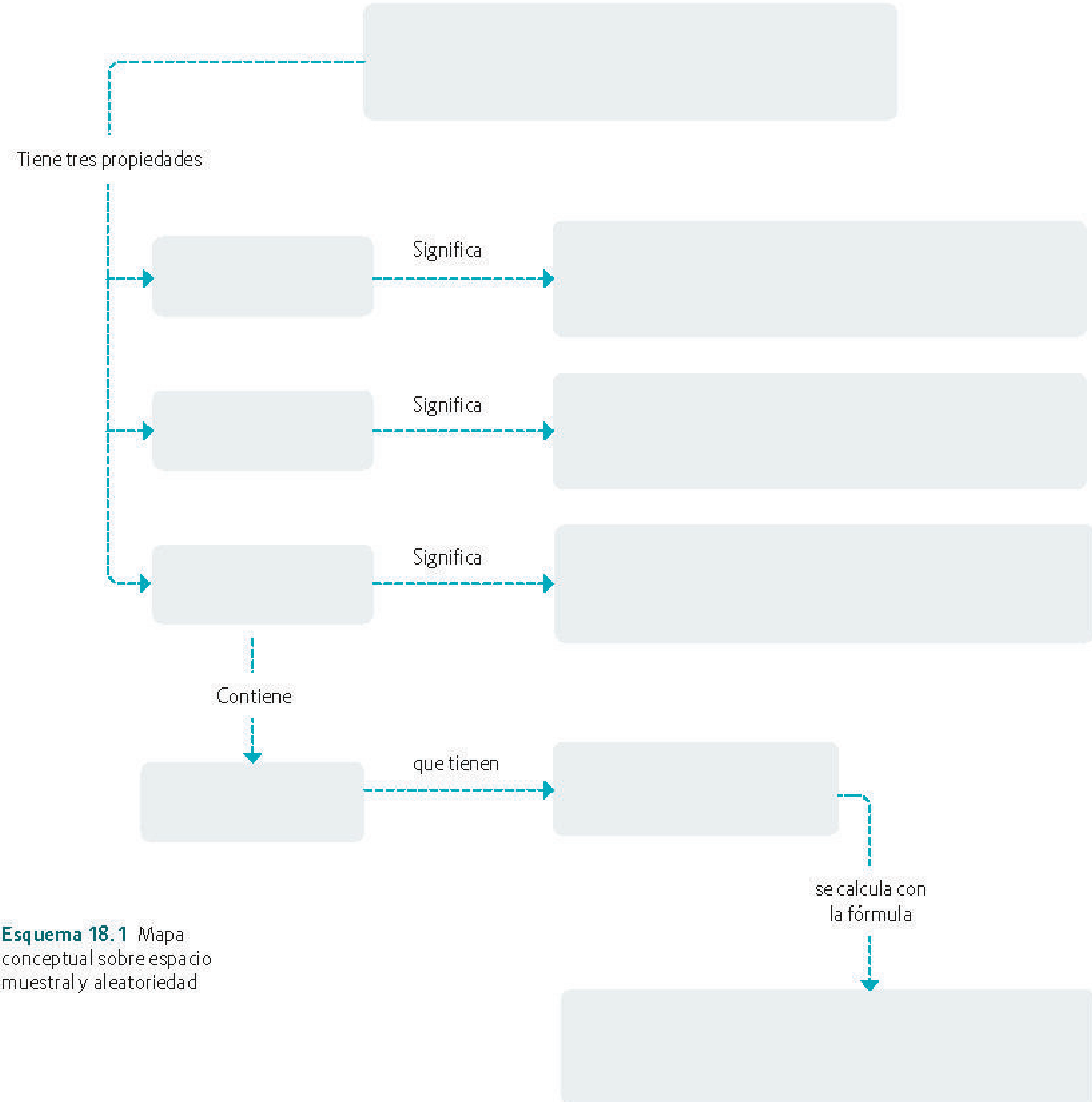
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Alejandra? ______________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que gane Pedro? ______________________
- ¿Cuál es la probabilidad de un empate? ______________________

f) Un juego es justo si los participantes tienen la misma probabilidad de ganar la misma cantidad. ¿Es justo el juego? Expliquen. ______________________

En retrospectiva

Coloquen cada una de las siguientes frases en un cuadro del mapa conceptual de la siguiente página de manera que exprese las relaciones pertinentes entre los conceptos.

- Aleatoriedad
- Espacio muestral
- Evento
- Experiencia aleatoria
- No se puede predecir el resultado
- Probabilidad
- $P(E) = \frac{\text{Resultados favorables a E}}{\text{Total de resultados posibles}}$
- Repetibilidad
- Se puede repetir bajo las mismas condiciones
- Se pueden numerar todos los resultados potencialmente posibles



Esquema 18.1 Mapa conceptual sobre espacio muestral y aleatoriedad

¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente.

1. Una urna contiene cinco bolas rojas tres verdes y dos amarillas. Se revuelven bien y se extrae una bola al azar y se observa su color.
   a) ¿Cuál es la probabilidad obtener una bola roja? ____________________
   b) ¿Cuál es la probabilidad obtener una bola verde? ____________________
   c) ¿Cuál es la probabilidad obtener una bola amarilla? ____________________
   d) ¿Cuánto suman las probabilidades de los tres eventos? ____________________

2. Jorge tiene dos pares de tenis en su zapatera. Un día que salía de prisa para hacer deporte, tomó dos tenis al azar y los metió a su petaca. Respondan las preguntas.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado dos tenis para el pie derecho?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado dos tenis para el pie izquierdo?
   c) ¿Qué probabilidad hay de que haya tomado un tenis izquierdo y uno derecho?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado un par correcto?

3. En una escuela se hizo una encuesta; la pregunta fue: ¿A dónde vas a ir a estudiar terminando la secundaria? Además se separaron las respuestas de los hombres de las de las mujeres. En la tabla 18.7 se presentan la frecuencia de cada respuesta.

Tabla 18.7 Resultados de una encuesta

Piensa continuar en:	Hombres	Mujeres
Bachillerato general	12	14
Bachillerato tecnológico	4	0
Profesional técnica	6	1
Trabajar	1	2
Total	23	17

   a) ¿Cuántos alumnos hay en el grupo?
   b) Si se elige un estudiante al azar:
      - ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre?
      - ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?
      - ¿Cuál es la probabilidad de que piense estudiar en el bachillerato general?
      - ¿Qué probabilidad hay de que piense estudiar el bachillerato tecnológico?

* Reúnanse con otro compañero y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten sus respuestas hasta llegar a un acuerdo.

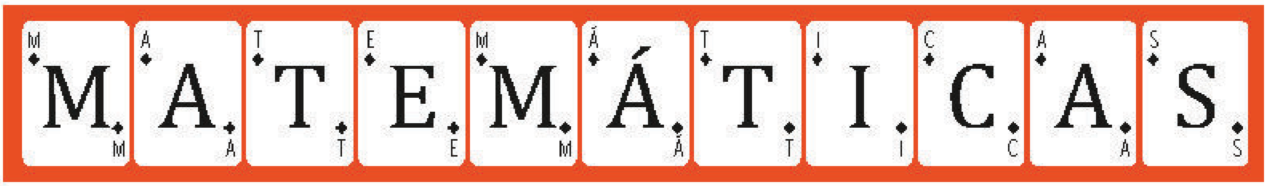
4. Se lanzan dos dados y se suman los números de las caras que exhiben hacia arriba cuando quedan en el suelo. Enlisten todos los resultados posibles y en la tabla de abajo anoten sus probabilidades.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidad											

5. Lorena tenía su alcancía llena de monedas de \$5.00, \$10.00 y \$20.00. Debido a que tuvo muchos gastos sacó tantas monedas que sólo quedaron tres en la alcancía, pero no sabe de qué valor son.
   a) ¿Cuántas cantidades de dinero diferentes se pueden pagar con 3 monedas elegidas de entre monedas de \$5.00, \$10.00 y \$20.00? ______
   b) Con ayuda de un diagrama de árbol, determinen todas las posibilidades ternas de monedas que pueden quedar en la alcancía. ______
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que le queden \$35.00 en la alcancía? ______
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que le queden \$30.00 en la alcancía? ______
   e) Utilizando monedas de \$5.00, \$10.00 y \$20.00, ¿de cuántas maneras se pueden pagar \$30? ______
   f) ¿Cuál es el máximo de monedas que puedes utilizar para pagar \$30.00? ______

6. Para cada letra de la palabra MATEMÁTICAS se elabora una carta, de modo que se obtiene un juego de cartas como se observa a continuación.



   a) ¿Cuántas cartas hay? ______
   b) ¿Cuántas letras diferentes tiene la palabra "matemáticas"? ______
   c) Completen la tabla con las probabilidades del experimento mencionado.

Letra	M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A	S	Total
Probabilidad												

   a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta con una letra vocal? ______
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta con una letra consonante? ______

* Reúnanse con otro compañero y comparen sus respuestas a los problemas de esta sección. En los casos en que no coincidan, revisen y argumenten sus procedimientos hasta llegar a un acuerdo. Si este no se produce o si mantienen dudas, consulten con su profesor.

BLOQUE 3

S19 Volumen de prismas y cilindros rectos

Una mirada previa

Aprendizaje esperado

- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

Trabajen individualmente.

Con una hoja de papel tamaño carta se puede hacer un cilindro enrollándola, pero hay dos maneras de hacer esto: a lo largo o a lo ancho, como se muestra en la figura 19.1. Si se quiere conseguir el cilindro de mayor volumen con la hoja, ¿cómo conviene más enrollar? ¿O da igual cómo lo hagan? ______________________

____

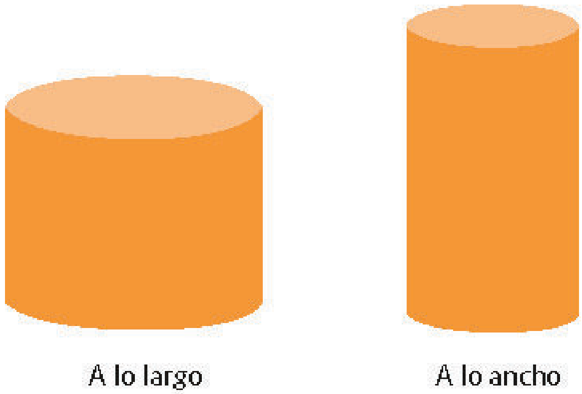


Figura 19.1 Cilindros de papel

Sesión 1. Volúmenes de prismas

α

Reúnanse en parejas.

1. Necesitarán hojas de papel bond, un juego de geometría, tijeras y cinta adhesiva. En la figura 19.2 se presentan el desarrollo de planos de dos prismas con bases de polígonos regulares, uno triangular y uno pentagonal.

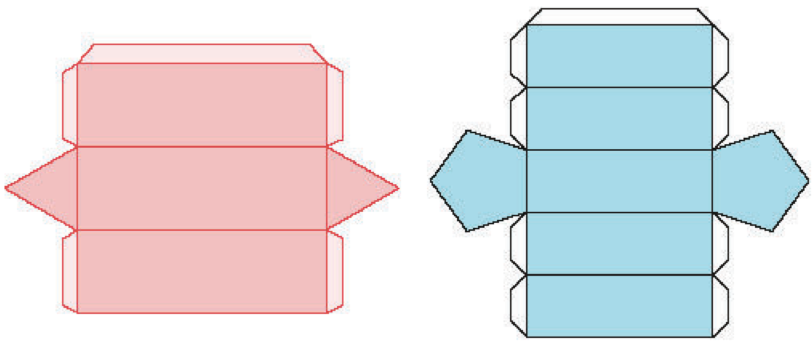


Figura 19.2 Desarrollo de planos de dos prismas

a) Usen como modelo los desarrollos planos de la figura 19.2 para construir un prisma triangular cuya base sea un triángulo equilátero 3 cm de lado y 2.6 cm de altura, y un prisma pentagonal cuya base sea un pentágono regular de lado 3 cm. La altura de ambos prismas debe ser 12 cm.

b) Para construir el pentágono que será la base del prisma pentagonal, empiecen por trazar un triángulo isósceles de base 3 cm y en cada extremo un angulo de 54° como se vio en la secuencia 16 sesión 3. Terminen la construcción.

2. Necesitarán hojas de papel bond, juego de geometría, tijeras y cinta adhesiva.
   a) Expliquen cómo se obtiene el volumen de un prisma triangular y escriban la expresión algebraica para calcularlo. ______________________

   b) ¿Qué volumen tiene el prisma triangular que armaron en la actividad 1? Expliquen cómo lo obtuvieron. ______________________

   c) Construyan cinco prismas triangulares más. ______________________
   d) Unan los seis prismas que armaron para formar un prisma hexagonal. ¿Cuál es el volumen de ese prisma? ______________________

3. Tomen el prisma pentagonal que construyeron en la actividad 1.
   a) La base puede dividirse en cinco triángulos isósceles. Midan la apotema o, lo que es lo mismo, la altura de cada uno de estos triángulos. Escriban el resultado en su cuaderno.
   b) Imaginen el prisma pentagonal dividido en cinco prismas triangulares con base en los triángulos que dibujaron.
      i. ¿Cuál es el volumen de cada uno? ______________________
      ii. ¿Cuál es el volumen del prisma pentagonal? ______________________

4. Al dividir el pentágono en prismas triangulares
   a) ¿Qué ocurre con la base del prisma original?
   b) ¿Qué parte del área del pentágono es el área de la base de uno de los prismas triangulares?
   c) Llamen A al área de uno de esos triángulos, ¿cuál es el volumen del prisma que tiene ese triángulo por base y altura h?
   d) ¿Cuál es el volumen de los cinco prismas triangulares unidos?
   e) ¿Cuál es el área del pentágono, llámala B?
   f) ¿Cuál es el volumen del prisma pentagonal?
   g) ¿Cómo son los resultados que encontraste en **d** y **f** entre sí?

5. Obtuvieron el volumen de un prisma pentagonal a partir del volumen de un prisma triangular que, como sabes, es $V = Ah$, donde A es el área de la base del prisma y h la altura del prisma. Reúnanse con otra pareja para discutir lo siguiente:
   a) ¿Esto se puede generalizar para un prisma cuya base sea un hexágono regular? Justifiquen su respuesta.
   b) ¿Esto se puede generalizar para un prisma cuya base sea cualquier polígono regular de n lados? Justifiquen su respuesta.

Apóyense en las explicaciones anteriores y resuelvan los problemas del punto 6.

6. Encuentren los datos faltantes en la tabla 19.1. Contiene información sobre varios prismas rectos: área de las bases, altura y volumen. Hagan sus cálculos en el recuadro. Dibujen los polígonos, divídanlos en los triángulos apropiadamente, apliquen la fórmula para el volumen de un prisma triangular e imaginen que unen los prismas triangulares para volver al prisma original.

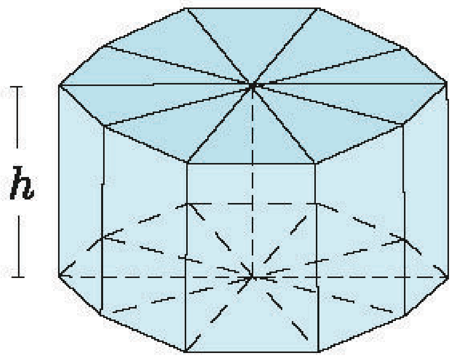
Tabla 19.1 Prismas rectos

Prisma de base	Área de la base (m^2)	Altura (m)	Volumen (m^3)
Decágono regular		12	1628.4
Heptágono regular	44.5	7	
Dodecágono regular	70		560
Octágono regular	77.25		772.5

Si les cuesta trabajo dibujen los polígonos, divídanlos en los triángulos apropiadamente, apliquen la fórmula para el volumen de un prisma triangular e imaginen que unen los prismas triangulares para volver al prisma original.

7. Una fuente en forma de prisma decagonal (su base es un decágono regular) tiene una capacidad de 2 640 L (figura 19.3). La superficie del decágono es de 330 dm^2. ¿Cuánto mide su altura? ______

Figura 19.3 Fuente en forma de prisma decagonal



8. Las celdas de los panales de abejas tienen forma de prismas hexagonales. Aunque varía de acuerdo a la especie, en promedio las celdas tienen un área de 0.0065 dm^2 y profundidad de 0.25 dm. Se tiene un pedazo de panal de 252 celdas. Respondan las preguntas. Pueden usar el recuadro de abajo para hacer los cálculos de esta actividad y la 7.

   a) ¿Cuánta miel contiene? ______

   b) ¿Alcanza para llenar un frasco de medio litro? ______

9. La fosa de clavados de una alberca tiene 7 m de profundidad y una capacidad de 175000 L y forma de prisma cuadrangular, ¿cuánto miden cada uno de sus lados? ______

Con otra pareja revisen sus resultados a los problemas de la sesión. Para esto, razonen usando la fórmula $V = A_b h$ y pregúntense: ¿Cómo se obtiene V si se conocen A_b y h? ¿Cómo se conoce A_b si se conocen V y h? ¿Cómo se conoce h si se conocen V y A_b? Escriban sus conclusiones en las siguientes líneas.

ω

______

______

______

* En plenaria analicen la fórmula del volumen y la manera de operar los datos para encontrar un valor faltante en ella.

Sesión 2. Volumen del cilindro

α

Trabajen en parejas.

1. Necesitan juego de geometría, hojas de papel tamaño carta, cinta adhesiva y una bolsa de semillas como arroz, lentejas u otra.

   a) Armen dos cilindros con dos hojas de papel, uno enrollando a lo largo y otro a lo ancho. Corten círculos para ponerle base a cada uno. Peguen bien con la cinta adhesiva y comparen cuánto le cabe de arroz a cada uno. ¿A cuál le cabe más?

b) Revisen sus respuestas a la sección *Una mirada previa* al inicio de esta secuencia. ¿Cambió su respuesta? ______________________

Trabajen en parejas.
En la secuencia 17 se esbozó una manera de justificar la fórmula para calcular el área de un círculo. La imagen utilizada es como la figura 19.4.

2. Consideren el círculo de la imagen 19.4 como la base del cilindro.

a) ¿Cómo es el área del decágono respecto al área del círculo?

b) Si en vez de un decágono se inscribe un polígono regular de 20 lados. ¿Se aproximaría más su área a la del círculo que la del decágono?

c) Escriban la fórmula para obtener el volumen de un prisma de n lados a partir del volumen de los prismas triangulares, de área de la base A y altura h, que lo forman. ______________________

d) La figura 19.4 se usó para ilustrar cómo pasar del área de un polígono de 10 lados a la del círculo. Imaginen ahora que esa imagen es la base del cilindro y que en éste se ha insertado un prisma decagonal.
i) Imaginen que se van aumentando los lados del polígono regular inscrito en la base. ¿A qué volumen se van acercando los volúmenes de los prismas a medida que aumenta el número de los lados de sus bases?

____

ii) Hagan una conjetura sobre la fórmula para obtener el volumen de un cilindro imaginando que su base es un polígono de n lados y que n es muy grande.

____

Para corroborar su conjetura, consideren la siguiente información:
Como en el caso de los prismas, el volumen del cilindro de radio r es igual al área de la base por la altura.
iii) ¿Qué forma tiene la base del cilindro? ______ ¿Cuál es el área de la base del cilindro? ______ ¿Cuál es la fórmula del volumen de un cilindro cuya base es un círculo de radio r? ____________ ¿Coincide esta expresión con su conjetura del inciso anterior? ______________________

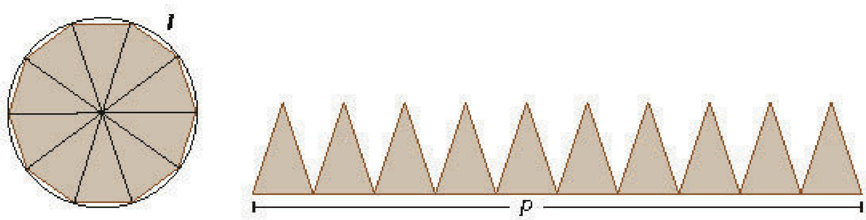


Figura 19.4 Círculo

El volumen de un cilindro de radio r y altura h es $V = \pi r^2 h$.

3. Un fabricante de barriles de petróleo produce barriles cilíndricos de 0.42 m de diámetro y 1.15 m de altura y sus barriles cumplen con la unidad oficial mundial que establece que un barril es equivalente a 159 L. Comprueben la conjetura que desarrollaron en la actividad 2 con esta información.

Problemas

Trabajen en parejas y resuelvan los siguientes problemas.

4. El tanque cilíndrico de una pipa de agua mide 5 m de largo y tiene capacidad de 6000 L. ¿Cuál es el diámetro del tanque? ______

5. Un pozo de agua de forma cilíndrica mide 98 m de profundidad y 0.38 m de radio.
   a) Si el pozo se llena completamente, ¿cuánta agua contiene? ______
   b) Comúnmente el agua sólo llega a los 70 m de altura. ¿Cuántos litros contiene en este caso? ______

6. En una construcción en zona regular, se recomienda que una columna cilíndrica de **hormigón** tenga al menos 36 cm de diámetro y 43 cm en zona sísmica. ¿Qué diferencia existe en el volumen de hormigón usado en los dos tipos de columnas si éstas miden 3.5 m de alto? ______

En otras palabras

El **hormigón** es un material de construcción formado por una mezcla de piedras menudas y un tipo de argamasa (cal, cemento, arena y agua).

7. El perímetro máximo de una pelota de béisbol profesional es de 24 cm. ¿Cuál es el volumen de un cilindro que contiene tres de esas pelotas sin espacio entre ellas ni entre las paredes del cilindro, como se muestra en la figura 19.5. Expliquen el procedimiento que usaron y su respuesta final. ______

8. Califiquen las siguientes frases con 1 si no están de acuerdo, con 2 si están de acuerdo pero no completamente y con 3 si están totalmente de acuerdo.
   a) Me interesa mucho el tema de medición del volumen. ______
   b) Me siento incómodo cuando no logro recordar las fórmulas del volumen que estudiamos en esta secuencia. ______
   c) Cuando no logro recordar una fórmula para el volumen, me siento seguro de que puedo volver a aplicar el análisis que hicimos en clase para recordarla. ______

Autoconocimiento

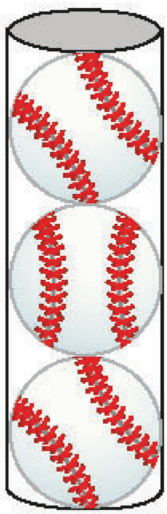


Figura 19.5 Contenedor de pelotas de béisbol

9. Con otra pareja revisen sus resultados a los problemas de las actividades. Para esto, respondan las preguntas.

¿Cuál es el valor buscado o desconocido? ______

¿Qué valores se desconocen? ______

¿Cuál es la fórmula para el volumen del cuerpo en cuestión? ______

Revisen el método que siguieron para hacer la conversión de medidas de capacidad a medida de volumen cuando esto fue necesario. ______________________________

____

____

* Reúnanse con una pareja. Revisen las respuestas y resultados que obtuvieron a lo largo de esta sesión y compárenlos. Si hay dudas, revisen sus operaciones con la calculadora para rectificar los resultados. Además, pueden discutir sobre los conceptos y la variación que estos pueden tener dependiendo de la posición del prisma o cilindro.

En retrospectiva

En esta secuencia de dos sesiones se estudiaron algunos de los siguientes conceptos.

- Volumen de un prisma
- Volumen de un cilindro
- La fórmula: $V = A_b \times h$

Donde V es el volumen del prisma o cilindro, A_b es el área de la base y h la altura.

Coloquen cada contexto o texto de la lista anterior en los óvalos vacíos del esquema de modo que el mapa conceptual sea coherente, es decir, que exprese correctamente las relaciones entre los conceptos.

Esquema 19.1 Mapa conceptual de volumen de prismas y cilindros rectos

Para obtener el volumen de prismas y cilindros...

Se calcula el área de la base

Se mide la altura

Se aplica la fórmula

¿Qué aprendí?

Resuelvan individualmente. Usen su calculadora.

1. En un hotel ecológico usaron tubos de concreto para hacer las habitaciones, como se ve en la figura 19.6. Cada tubo tiene 1650 mm de diámetro interior, esto es, el que se mide por dentro del tubo, sin importar el grosor, y 2 560 mm de profundidad. ¿Cuánto espacio proporcionan estos tubos para cada habitación?

Figura 19.6 Habitaciones cilíndricas de concreto

2. Los vasos en forma de prisma octagonal de la figura miden 8 cm de altura pero el grueso del fondo del vidrio es de 1.5 cm. Si el área de la base es 40 cm^2, ¿cuántos mililitros de agua caben en cada vaso? __________

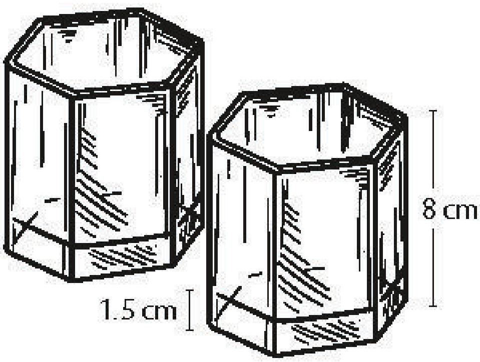


Figura 19.7 Vasos en forma de prisma octogonal

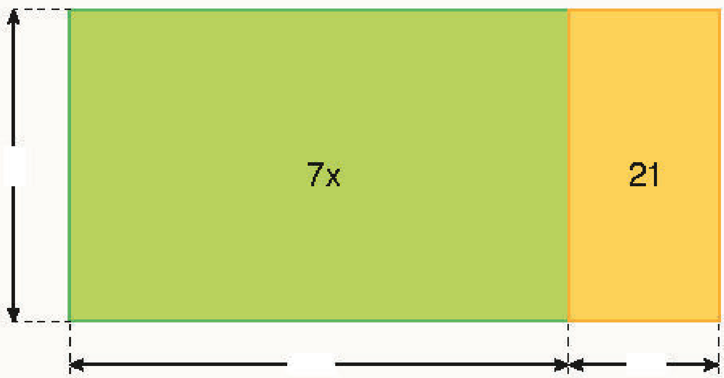
3. Para una comunidad se necesita cavar un pozo de 90 m de profundidad y que su capacidad máxima sea de 85400 L. ¿Qué diámetro debe tener el círculo que se va a excavar? __________

* Analicen sus respuestas y pregúntense si tienen sentido en el contexto del problema correspondiente. Traten de imaginar la situación o hagan un dibujo que represente el problema para ayudarse a decidir si sus respuestas son plausibles.

Si tienen duda en alguna, vuelvan a hacer las operaciones con la calculadora para descartar errores de cálculo. Si aún tienen duda, reúnanse con un compañero para tratar de encontrar si hay error y cuál es su origen.

Evaluación. Bloque 3

1. Observen en la figura E3.1, el rectángulo que está dividido en dos rectángulos más pequeños.



a) Los valores $7x$ y 21 representan las áreas de los rectángulos pequeños. Con base en éstas, escriban una expresión del área A del rectángulo grande. ______________________

b) En los márgenes de los rectángulos escriban las dimensiones de los lados de los rectángulos pequeños.

c) Escriban las dimensiones del rectángulo grande. ______________________

d) Escriban otra expresión para el área del rectángulo grande y escriban la identidad correspondiente. ______________________

2. Observen las tablas y hagan lo que se indica.

a) Completen la tabla E3.1 en la que se muestran las características de un decágono regular.

Tabla E3.1 Características de un decágono

Característica	Decágono regular
Número de lados	
Medida de los ángulos centrales	
Medida de los ángulos internos	
Diagonales	

b) ¿Con cuáles de los polígonos regulares mencionados en la tabla E3.2 se puede formar una teselación regular, esto es, con copias de un mismo polígono regular? Escriban su justificación en la misma tabla.

Tabla E3.2 Formación de teselación regular

Polígono regular	¿Se puede?	Justificación
Cuadrado		
Octágono		
Decágono		

Evaluación

3. Una regadera giratoria de pasto tiene un alcance de 1.12 m de radio. ¿Qué perímetro y qué área tiene el círculo que alcanza a regar? ______

4. Un piso de baño está totalmente cubierto por 56 mosaicos en forma de hexágonos regulares de 20 cm de lado y 17 cm de apotema.

   a) ¿Cuál es el perímetro de un mosaico? ______

   b) ¿Cuál es el área del piso del baño? ______

5. Observen los polígonos de la figura E3.2. Con ellas se hace una figura uniendo los lados como se muestra en la figura E3.3. Decimos que dos piezas "encajan" si ambas tienen un lado de la misma dimensión, de manera que se puedan pegar por ese lado. Se obtienen dos figuras al azar y se observa si encajan o no.

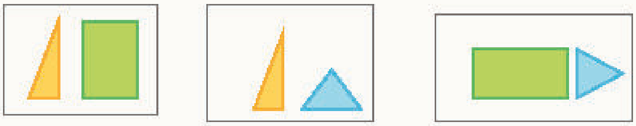


Figura E3.2 Formación de figuras a partir de otras

   a) Describan el espacio muestral del experimento. ______

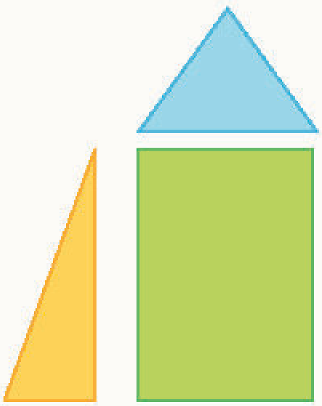


Figura E3.3 Formación de una figura a partir de otras

   b) Encuentren la probabilidad de que dos piezas elegidas al azar encajen. ______

   c) Encuentren la probabilidad que las dos piezas no encajen. ______

6. Un tanque cilíndrico de agua con capacidad de 1809 L tiene un diámetro de 1.2 m. ¿Cuánto mide de altura? ______

7. Una jarra en forma de prisma octagonal tiene capacidad de 1.2 L y una altura de 15 cm. ¿Cuál es el área de su base? ______

Evaluación

Bibliografía

Fuentes consultadas

- Alsina, Claudi, Josep María Fortuny y Rafael Pérez, *¿Por qué geometría?*, Madrid, Síntesis, 1999.
- ___________, *Invitación a la didáctica de la geometría*, Madrid, Síntesis, 1999.
- Billstein, Rick, Shlomo Libeskind y Johnny W. Lott, *Matemáticas: un enfoque de resolución de problemas para maestros de educación básica*, vols. I y II, 10a. ed., México, López Mateos Editores, 2013.
- Block, David, *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*, (Col. Somos Maestros), México, SM, 2015.
- Callejo, María Luz, *Un club matemático para la diversidad*, Madrid, Narcea, 1994.
- Carraher, Terezinha, David W. Carraher y Analucía D. Schliemann, *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 2004.
- Carrillo de Albornoz, Agustín, e Inmaculada Llamas, *GeoGebra: mucho más que geometría dinámica*, España, Ra-Ma, 2009.
- Cedillo, Tenoch, "Sentido numérico e iniciación al álgebra", en *La calculadora en el salón de clase*, vols. I-III, México, Iberoamérica, 1998.
- Chamorro, María del Carmen, *Didáctica de las matemáticas para la educación secundaria*, Madrid, Pearson Educación, 2005.
- Clark, David, *Evaluación constructiva en matemáticas*, México, Iberoamérica, 2002.
- Cournat, Richard, y Herbert Robbins, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2002.
- Del Olmo, María Ángeles, María Francisca Moreno y Francisco Gil, *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*, Madrid, Síntesis, 1989.
- Linares, Salvador, y María Victoria Sánchez, *Fracciones: la relación parte-todo*, Madrid, Síntesis, 1999.
- Mochón, Simón, Teresa Rojano y Sonia Ursini, *Modelación. Matemáticas del cambio*, México, Secretaría de Educación Pública, 2000.
- Peña, Luis Ignacio de la (comp.), *Diccionario esencial de matemáticas*, México, Larousse, 2013.
- Pólya, George, *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 1989.
- Rojano, T. y Ursini, S., *Álgebra con hojas electrónicas de cálculo*, México, Iberoamérica, 1998.
- Sánchez, Ernesto (coord.), *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*, México, Secretaría de Educación Pública (Teoría y Práctica Curricular de la Educación Básica), 2011.
- Stewart, Ian, *Historia de las matemáticas*, España, Crítica, 2008.
- Ursini, Sonia, *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa* (Biblioteca de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas), México, Trillas, 2005.

Fuentes recomendadas

- Alsina, Claudi, *Vitaminas matemáticas*, España, Ariel, 2008.
- Álvarez Nebreda, José Alberto y Ginés García Soto, *Matemáticas. Guía práctica para la vida cotidiana*, Madrid, Alianza Editorial, 2001.
- Andradas Heranz, Carlos, *Póngame un kilo de matemáticas* (Col. El Barco de Vapor), Madrid, SM, 2000.
- Blatner, David, *El encanto de pi*, México, Secretaría de Educación Pública-Aguilar, 2003.
- Bosch Giral, Carlos, y Claudia Gómez Wulschner, *Una ventana a las formas*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002.
- Burns, Marilyn, *¡Odio las matemáticas! Juegos, acertijos y experimentos matemáticos*, México, Trillas, 1994.
- Camous, Henri, *Problemas y juegos con la matemática*, Barcelona, Gedisa, 1995.
- Crilly, Tony, *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*, España, Ariel, 2009.
- De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002.
- __________, *Matemáticas y la vida cotidiana*, México, Secretaría de Educación Pública-Santillana, 2002.
- Díaz Godino, Juan, Carmen Batanero, María de Jesús Cañizares, *Azar y probabilidad*, Madrid, Síntesis, 1987.
- Flores Arredondo, Gabriel, *Nuevos juegos mentales*, México, Selector, 2010.
- García Arenas, Jesús y Celestí Bertrán i Infante, *Geometría y experiencia*, México, Addison-Wesley Longman, 1998.
- Goldsmith, Mike, *Matemática mente*, trad. María Teresa Marcos Bermejo, España, Fundación Santa María-SM, 2013.
- Hitt, Fernando, *Funciones en contexto*, México, Pearson Educación, 2002.
- Langdon, Nigel y Charles Snape, *El fascinante mundo de las matemáticas*, México, Limusa, 2002
- Marván, Luz María, *Andrea y las fracciones*, México, Secretaría de Educación
- Pública-Santillana, 2002.
- Miller, Charles D., Vern Heeren y John Hornsby, *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, México, Addison-Wesley Longman/Pearson, 1999.
- Sardar, Ziauddin, Jerry Ravetz y Borin Van Loon, *Matemáticas para todos*, España, Paidós, 2005.
- Tahan, Malba, *El hombre que calculaba*, México, Limusa, 2002.
- __________, *Matemática, divertida y curiosa*, España, RBA, 2009.
- Tonda, Juan, Francisco Ñoreña, *Los señores del cero: el conocimiento matemático en Mesoamérica*, México, Secretaría de Educación Pública/Pangea Editores, 2003.
- Wells, David, *El curioso mundo de las matemáticas*, Barcelona, Gedisa, 2000.

Fuentes electrónicas
(Consulta: 30 de junio de 2018)

Página de la Subsecretaría de Educación Básica.
http://basica.sep.gob.mx/

GeoGebra. Software con herramientas para geometría, álgebra, hoja de cálculo, probabilidad, entre otros.
https://www.geogebra.org/

KhanAcademy. Portal con ejercicios de práctica y videos instructivos
https://es.khanacademy.org/math

Educar Chile. Recursos educativos interactivos.
http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/search?sc=1000%3A&ml=10000&co=

Comparación del precio de la gasolina en México y EUA.
http://www.mexicomaxico.org/Voto/GasolMexUSA.htm

Documento de ayuda de GeoGebra.
https://app.geogebra.org/help/docues.pdf

Enciclopedia de todas las palabras de las matemáticas.
http://www.allmathwords.org/es/

Encuesta nacional de hábitos, prácticas y consumo culturales.
http://www.conaculta.gob.mx/encuesta_nacional

Matemáticas visuales.
http://www.matematicasvisuales.com/index.html

Tasa de natalidad.
https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/2054rank.html

DivulgaMAT. Centro virtual de divulgación de las matemáticas de la Real Sociedad Matemática Española.
http://www.divulgamat.net/

Eduteka. Portal con herramientas educativas para enriquecer el ambiente educativo
http://eduteka.icesi.edu.co/

Procomún. Red de Recursos Educativos en Abierto.
https://procomun.educalab.es/es#

Red ILCE. Pensamiento lógico matemático México.
http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117

PUEMAC. Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora.
http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/

Créditos iconográficos

© Shutterstock Inc.: pp. 4, 5, 7, 12-13, 17, 36, 101, 104-105, 134, 138, 177, 188, 226, 228, 230, 232, 234, 239 (arr. centro) (ab. izq.), 255, 263, 265, 267.

p. 202-203: Zona Arqueológica de Tula, Hidalgo. "Reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Antropología e Historia" © Shutterstock.